Circle Problem Solving

Advanced Coordinate Geometry

∞ Let Infinity Be Your Limit ∞

May 23, 2026

বৃত্ত বা সার্কেল: স্থানাঙ্ক জ্যামিতির জাদুকরী রূপ

বন্ধুরা, স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে বৃত্ত (Circle) অত্যন্ত মজার একটি বিষয়। তুমি যখন বৃত্তের বিভিন্ন সমীকরণ আর তাদের বৈশিষ্ট্য নিয়ে ঘাঁটাঘাঁটি করবে, তখন দেখবে পুরো বিষয়টা কত সুন্দরভাবে লজিক দিয়ে সাজানো! আজ আমরা বৃত্তের প্রাথমিক বিষয় থেকে শুরু করে অ্যাডভান্সড কিছু প্রবলেম সলভিং টেকনিক শিখব।

শুরুতেই আসি বৃত্তের সংজ্ঞায়। বৃত্ত হলো এমন একটি সঞ্চারপথ, যার প্রতিটি বিন্দু একটি নির্দিষ্ট কেন্দ্র (Center) থেকে সমান দূরত্বে থাকে। এই দূরত্বটাই হলো ব্যাসার্ধ (Radius)।

Basic Forms of a Circle

১. Standard Form:
যদি বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ r হয়, তবে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী সমীকরণটি দাঁড়ায়:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

২. General Equation:
Standard Form-টাকে এক্সপ্যান্ড করলে আমরা পাই:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$$

এটিকে আরও গুছিয়ে লিখলে পাওয়া যায় সাধারণ সমীকরণ:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

তুমি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ, এখানে $g=-h$, $f=-k$ এবং $c=h^2+k^2-r^2$। তাই কেন্দ্র হলো $(-g,-f)$ এবং ব্যাসার্ধ $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$।

ট্যানজেন্ট বা স্পর্শক: সূত্র কীভাবে আসে?

ধরো, একটি সরলরেখা $y=mx+c_1$ একটি বৃত্ত $x^2+y^2=r^2$-কে স্পর্শ করে (Tangent)। তুমি কি জানো এর শর্ত কী? চলো, আমরা এটা ডেরাইভ (Derive) করি!

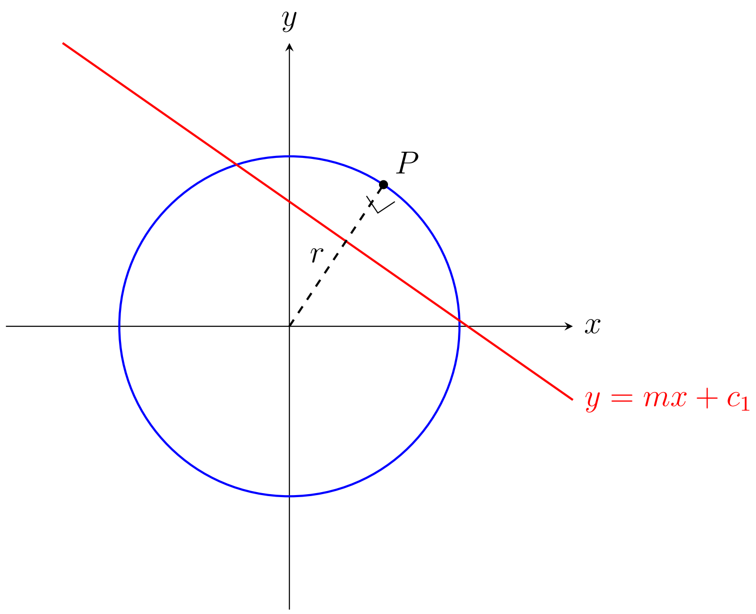
যদি রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে কেন্দ্র $(0,0)$ থেকে রেখাটির লম্ব দূরত্ব ঠিক ব্যাসার্ধ r-এর সমান হতে হবে। রেখার সমীকরণ: $mx-y+c_1=0$। কেন্দ্র $(0,0)$ থেকে এই রেখার লম্ব দূরত্ব:

$$d=\frac{|m(0)-(0)+c_1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|c_1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

ট্যানজেন্ট হওয়ার শর্তানুযায়ী $d=r$। তাহলে,

$$\frac{|c_1|}{\sqrt{m^2+1}}=r \implies |c_1|=r\sqrt{m^2+1} \implies c_1^2=r^2(1+m^2)$$

কী দারুণ, তাই না? এটা একদম লিনিয়ারলি কানেক্টেড!



চিত্র ১: বৃত্তের স্পর্শক ও লম্ব দূরত্বের সম্পর্ক।

Power of a Point (বিন্দুর শক্তি)

পাওয়ার অফ এ পয়েন্ট খুবই পাওয়ারফুল একটি কনসেপ্ট। ধরো, বৃত্তের সমীকরণ $S(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এবং এর বাইরে একটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ আছে। এই বিন্দু থেকে বৃত্তে যদি একটি স্পর্শক টানা হয়, তার দৈর্ঘ্য PT কীভাবে বের করবে?

কেন্দ্র $C = (-g, -f)$। পিথাগোরাসের সূত্র থেকে আমরা পাই:

$$PT^2 = PC^2 - r^2$$

এখানে $PC^2 = (x_1 - (-g))^2 + (y_1 - (-f))^2 = (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2$। আর $r^2 = g^2 + f^2 - c$। এগুলো বসালে কী হবে?

$$PT^2 = (x_1^2 + 2gx_1 + g^2) + (y_1^2 + 2fy_1 + f^2) - (g^2 + f^2 - c)$$

$$PT^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = S(x_1, y_1)$$

অসাধারণ! তার মানে সমীকরণে শুধু বিন্দুটি বসালেই তুমি PT^2 বা পাওয়ার অফ দা পয়েন্ট পেয়ে যাচ্ছ!

কিছু অ্যাডভান্সড চ্যালেঞ্জিং প্রোবলেম (AoPS Collection)

চলো এবার আমরা কিছু কঠিন সমস্যার সমাধান করি। এগুলো Art of Problem Solving (AoPS) থেকে নেওয়া। তুমি নিজে আগে ট্রাই করতে পারো!

Problem 1: Intersecting Circles

দুটি বৃত্ত $C_1 : x^2 + y^2 = 25$ এবং $C_2 : x^2 + y^2 - 14x + 49 = 25$ দেওয়া আছে। এই দুটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা (Common Chord) এর বৃত্তীয় সমীকরণ বের করো।

সমাধান:

তুমি নিশ্চয়ই জানো, দুটি বৃত্ত $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$ ছেদ করলে তাদের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ হয় $S_1 - S_2 = 0$।

এখানে $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$ এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$ (যেহেতু $49 - 25 = 24$)।
এখন $S_1 - S_2 = 0$ করলে আমরা পাই:

$$(x^2 + y^2 - 25) - (x^2 + y^2 - 14x + 24) = 0$$

$$14x - 49 = 0 \implies 2x - 7 = 0 \implies x = 3.5$$

এটিই নির্ণেয় সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ! তুমি ছবিতে দেখলে বুঝবে এটা আসলে একটা উল্লম্ব রেখা।

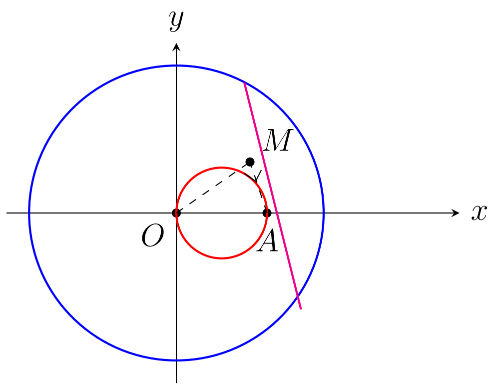
Problem 2: Locus Problem (AMC 12 Level)

একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ R। এর ভেতর দিয়ে যাওয়া একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ (Locus) বের করো, যদি জ্যা-টি সর্বদা বৃত্তের নির্দিষ্ট একটি বিন্দু A দিয়ে যায়।

সমাধান:
প্রথমে কোঅর্ডিনেট সেটআপ করি। ধরো বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু $O(0,0)$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দুটি অক্ষের উপরে $A(a,0)$, যেখানে $a \leq R$।
যেকোনো জ্যা যা A দিয়ে যায় তার মধ্যবিন্দু ধরি $M(h,k)$।
আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোগকারী রেখা জ্যা-এর উপর লম্ব হয়। সুতরাং $OM \perp AM$।
OM রেখার ঢাল (slope) $m_1 = \frac{k-0}{h-0} = \frac{k}{h}$।
AM রেখার ঢাল $m_2 = \frac{k-0}{h-a} = \frac{k}{h-a}$।
যেহেতু এরা লম্ব, তাই $m_1 \cdot m_2 = -1$:

$$\left(\frac{k}{h}\right)\left(\frac{k}{h-a}\right) = -1 \implies k^2 = -h(h-a) \implies h^2 - ah + k^2 = 0$$

এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ! তুমি চাইলে একে স্ট্যান্ডার্ড ফর্মে লিখতে পারো: $(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2$।
অর্থাৎ, সঞ্চারপথটি হবে এমন একটি বৃত্ত, যার ব্যাস OA।



চিত্র ২: সঞ্চারপথ হিসেবে নতুন বৃত্তটির উৎপত্তি।

উপসংহার

বৃত্ত এমন একটি বিষয় যেখানে জ্যামিতি আর অ্যালজেব্রা একে অপরের হাত ধরাধরি করে চলে। তুমি যত বেশি প্রবলেম সলভ করবে, তত বেশি নতুন নতুন আইডিয়া তোমার মাথায় আসবে। পরবর্তীতে আমরা Radical Axis ও Coaxial Circles নিয়ে আরও বিস্তারিত আলোচনা করব। হ্যাপি ম্যাথ-সলভিং!