Circles in Coordinate Geometry

Tawhid Bin Omar

∞ Let Infinity Be Your Limit ∞

April 6, 2026

বৃত্তকে কীভাবে ভাববে

বৃত্তের সংজ্ঞা খুবই সরল: একটি স্থির বিন্দু থেকে সমদূরত্বে থাকা সব বিন্দুর সমষ্টি। কিন্তু এই সরল জিনিসটাই coordinate geometry-তে সবচেয়ে শক্তিশালী objects-এর একটি। কারণ distance condition একবার equation-এ নামিয়ে আনতে পারলেই tangent, chord, power, intersection, and fitting সব এক ফ্রেমে চলে আসে।

বৃত্তের সংজ্ঞা

কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r-বিশিষ্ট বৃত্ত হলো সেই সব বিন্দুর সমষ্টি, যাদের জন্য

$$OP = r.$$

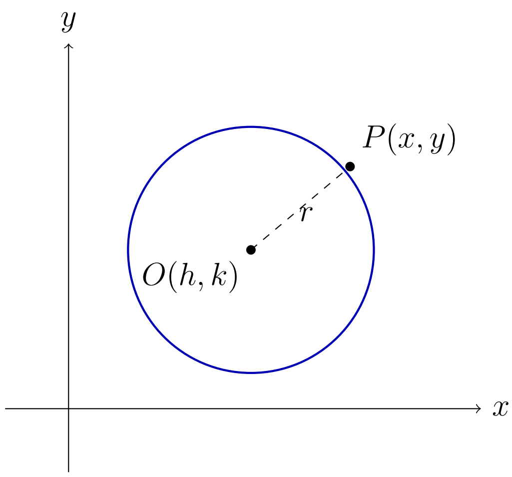
এটা locus language-এ circle-এর মূল definition।

ধরো কেন্দ্র $O(h, k)$। যেকোনো point $P(x, y)$-এর জন্য distance formula থেকে পাই

$$OP^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2.$$

যেহেতু circle-এ এই distance fixed and equal to r, তাই circle-এর standard equation দাঁড়ায়

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$



চিত্র ১: কেন্দ্র থেকে সমদূরত্বে থাকা বিন্দুগুলো একটি circle তৈরি করে।

স্ট্যান্ডার্ড form থেকে general form

বৃত্তের standard এবং general equation

Standard equation

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

expand করলে general form পাই

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

এখানে $g = -h$, $f = -k$, এবং $c = h^2 + k^2 - r^2$.

এখন expand করো:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2.$$

সব terms একদিকে আনলে

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0.$$

এখানে

$$2g = -2h, \qquad 2f = -2k, \qquad c = h^2 + k^2 - r^2.$$

তাই circle-এর coefficient pattern খুব special: x^2 আর y^2-এর coefficient equal, আর xy term নেই।

উল্টো দিকটাও equally important. যদি

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

দেওয়া থাকে, complete square করলে

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c.$$

তাই কেন্দ্র

$$(-g, -f)$$

এবং ব্যাসার্ধ

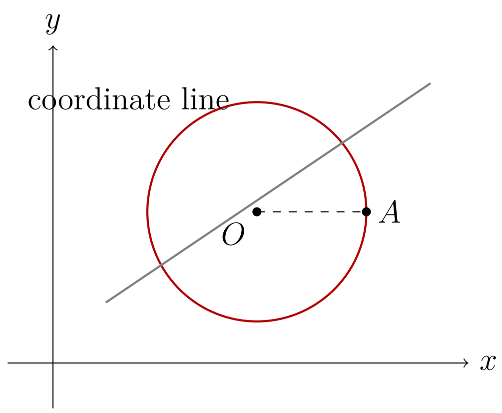
$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}.$$

বাস্তব circle হওয়ার শর্ত

যদি

$$g^2 + f^2 - c > 0,$$

তবেই real circle exists করে। যদি মান 0 হয়, circle একটি point-এ degenerate হয়; যদি negative হয়, real locus নেই।



চিত্র ২: coefficient-গুলো circle-এর center এবং radius encode করে।

একটি line circle-কে কোথায় কাটে

এখন line-circle intersection problem ধরো। line

$$ax + by + d = 0$$

এবং circle

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Line-এর equation থেকে একটি variable eliminate করলে
quadratic equation পাবে। সেই quadratic-এর discriminant-ই বলে
দেবে line circle-কে দুই জায়গায় কাটছে, এক জায়গায় ছুঁচ্ছে, নাকি একেবারেই কাটছে না।

Discriminant test

Substitution-এর পরে quadratic-এর discriminant

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2\text{টি intersection}, \quad \Delta = 0 \Rightarrow \text{স্পর্শক}, \quad \Delta < 0 \Rightarrow \text{real intersection নেই}.$$

এটা practical-এ খুব শক্তিশালী। কারণ অনেক design problem-এ collision check মানে এই তিনটির একটি নির্ধারণ করা।

স্পর্শক: local geometry-র রাজা

Circle-এর সবচেয়ে সুন্দর local object হলো tangent. Tangent circle-কে এক বিন্দুতে ছোঁয় এবং সেই point-এ radius-এর perpendicular হয়।

Radius এবং tangent

যে বিন্দুতে tangent circle-কে ছোঁয়, সেই বিন্দুতে কেন্দ্র থেকে আসা radius tangent-এর উপর লম্ব।

তুমি যদি derivation চাও, circle

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

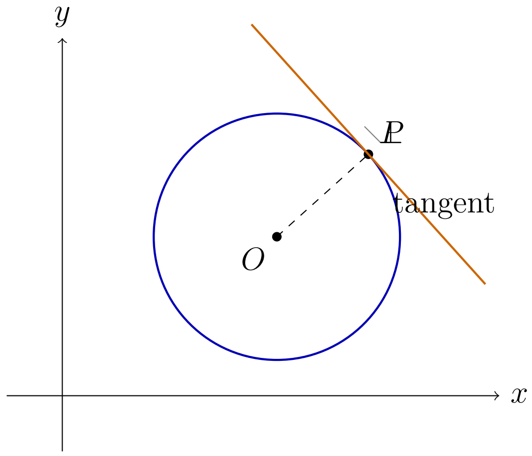
এবং তার উপর একটি point $P(x_1, y_1)$ নাও। তাহলে tangent-এর equation হবে

স্পর্শকের equation

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

Origin-centered circle হলে এটা আরও clean: $x^2 + y^2 = r^2$ circle-এ (x_1, y_1)-এ tangent হলো $xx_1 + yy_1 = r^2$.

এই formula-টা মনে রাখার সহজ উপায় হলো: circle equation-এ $x^2 + y^2$-এর জায়গায় তুমি symmetry-এর জন্য $xx_1 + yy_1$ বসিয়ে দাও। Tangent-টাও আসলে point contact-এর linearized version.



চিত্র ৩: tangent point P-এ radius OP tangent line-এর উপর লম্ব।

External point থেকে দুই tangent

যদি বাহ্যিক বিন্দু P থেকে circle-এ tangent দুটো PA এবং PB হয়, তাহলে

$$PA = PB.$$

এটা অনেক length-chasing problem-এর shortcut.

Chord, secant, আর power of a point

Circle geometry-তে chord মানে শুধু segment না; chord মানে symmetry and power-এর carrier. কেন্দ্র থেকে chord-এ perpendicular নামালে chord half-এ split হয়। এই fact coordinate-এ খুব clean.

কেন্দ্র থেকে chord-এ লম্ব

কেন্দ্র থেকে কোনো chord-এ অঙ্কিত perpendicular chord-টিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এবার একেবারে মৌলিক কিন্তু খুব শক্তিশালী theorem: power of a point. External point থেকে secant draw করলে দুই intersection-এর দূরত্বের product fixed থাকে।

Power of a Point

Circle-এর সাপেক্ষে একটি point P-এর power হলো

$$\mathrm{Pow}(P) = PA \cdot PB,$$

যেখানে A, B হলো যেকোনো secant line-এর সাথে circle-এর ছেদবিন্দু।

তুমি যদি line-কে parameter form-এ লেখো

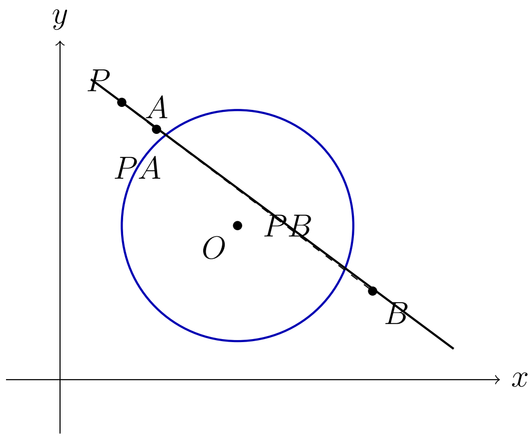
$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(u, v),$$

আর circle-এ substitute করো, তাহলে t-এর quadratic equation পাবে। দুটো root t_1, t_2-এর product fixed, আর সেই product থেকেই $PA \cdot PB$ আসে। এটিই power-এর algebraic core.

Tangent-secant theorem

যদি বাহ্যিক বিন্দু P থেকে tangent PT এবং secant PAB আঁকা হয়, তাহলে

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$



চিত্র 8: secant-এর product relation tangent case-এ square হয়ে যায়।

Angle-chasing-এর backbone

Circle problem-এ অনেক সময় algebra কম, angle chasing বেশি দরকার হয়। তখন তুমি two theorems-এ ভর করতে পারো: একই chord subtended angle relation, আর cyclic quadrilateral-এর opposite angle sum.

একই chord-এর theorem

কেন্দ্রে subtended angle circumference-এ subtended angle-এর দ্বিগুণ।

$$\angle AOB = 2\angle ACB.$$

Cyclic quadrilateral

যদি চারটি point একই circle-এ থাকে, তাহলে opposite angles supplementary.

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \qquad \angle B + \angle D = 180^\circ.$$

এই দুই fact দিয়ে many olympiad-style problems literally collapse. Because once four points are cyclic, angle relations become arithmetic.

তিনটি point দিয়ে unique circle

একটি essential construction হলো তিনটি non-collinear point দিলে unique circle পাওয়া। এটা শুধু theorem না, এটি equation fitting-এর basis.

Three-point circle theorem

যদি তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় না থাকে, তাহলে তাদের মধ্য দিয়ে একটি ও কেবল একটি circle যায়।

Coordinate proof খুব direct. General equation নাও

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

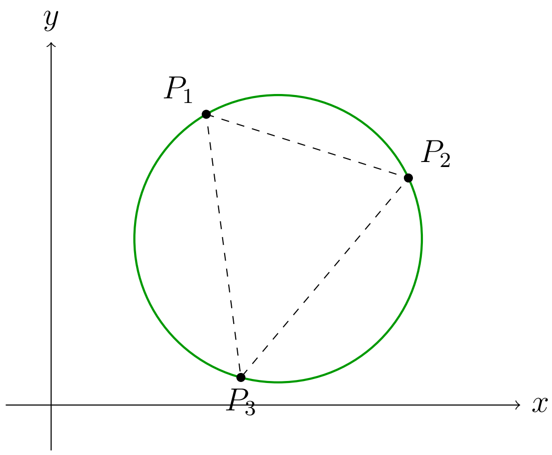
তিনটি point বসালে তিনটি linear equation পাবা। Unknown তিনটি, তাই unique solution আসে, provided points collinear না হয়।

Determinant form

Points $P_i = (x_i, y_i)$ হলে তাদের through circle satisfy করে

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

এটা computational geometry-তে খুব useful.



চিত্র ৫: একই circle-এর উপর থাকা তিন non-collinear point একটি unique circle determine করে।

দুটি circle একসাথে: radical axis আর radical center

ধরো circle দুটি আছে

$$S_1 : x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0,$$
$$S_2 : x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0.$$

দুটো equation subtract করলেই x^2+y^2 terms cancel হয়ে যায়, আর একটি line পাও। সেটাই radical axis.

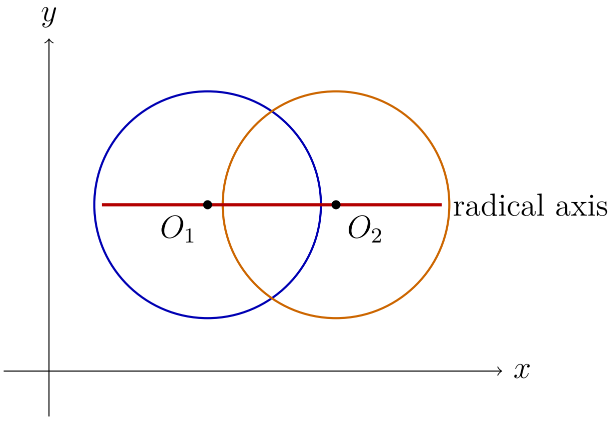
Radical axis

দুই circle-এর power সমান এমন সব point-এর locus হলো radical axis. যদি circle দুটি intersect করে, তাহলে তাদের common chord-টাই radical axis.

Subtract করলে

$$2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + (c_1 - c_2) = 0.$$

এই simple fact circle problem-কে line problem-এ নামিয়ে আনে।



চিত্র ৬: দুই circle-এর common chord এবং radical axis একই line.

Radical center

তিনটি circle pairwise-এর radical axis যদি তিনটি পাও, তবে সাধারণত তারা একটি point-এ ছেদ করে। সেই point-টাই radical center.

Circle family: coaxal system

দুই circle-এর linear combination নিলে circle-এর family পাওয়া যায়.

$$S_\lambda = S_1 + \lambda S_2 = 0.$$

এই family-কে coaxal system বলা হয়। Common radical axis fixed থাকে, তাই family-র structure খুব controlled হয়.

Coaxal family

যে সব circle একই দুই base circle-এর linear combination, তারা একটি coaxal family. এই family-র সব সদস্যের radical axis একই।

Orthogonal circles

দুটি circle যদি right angle-এ ছেদ করে, সেটা অনেক configuration-এ neat symmetry দেয়. Coordinate condition-ও খুব সুন্দর।

Orthogonality condition

কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব d এবং radii r_1, r_2 হলে circle দুটি orthogonal হবে তখনই যখন

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Circle equation দিয়ে problem solving

তুমি circle problem solve করতে চাইলে প্রথম প্রশ্ন হওয়া উচিত: কোন coordinate choice equation-কে সুন্দর করবে? Center জানা থাকলে origin-এ নিয়ে আসো। Symmetry থাকলে axis কাজে লাগাও। Chord থাকলে সেটাকে x-axis বানাও। এই ছোট সিদ্ধান্ত অনেক algebra বাঁচায়।

Toolkit

- Center known হলে translate করে origin-এ বসাও।
- Symmetry থাকলে axis ব্যবহার করো।
- Tangency থাকলে radius perpendicular ধরো।
- Two circles থাকলে subtract করে radical axis বের করো।
- Multiple tangents থাকলে power of a point দেখো।

এই toolset-টা habit হয়ে গেলে অনেক geometry problem coordinate-এ instantly structured মনে হবে।

Engineering চোখে circle

Engineering-এ circle design object হিসেবে আসে। Wheel, gear, bearing, pipe, dome, round flange, sensor range, antenna coverage—সবখানে radius and tangency constraint matter করে. Circle equation তাই শুধু textbook formula না; এটা design constraint-এর language.

Mechanical design-এ clearance এবং contact check করতে তুমি discriminant use করতে পারো. Civil-এ arch বা tunnel profile model করতে circle fit লাগে. Robotics-এ reachability region অনেক সময় circle বা annulus. Sensor fusion-এ দুই circular measurement-এর overlap radical axis-style logic দিয়ে handle করা যায়.

Engineering habits

- Measurement data থাকলে আগে equation লিখে constraint formalize করো।
- Noise থাকলে exact fit না ভেবে approximate fit ভাবো।
- Collision বা contact detect করতে discriminant দেখো।
- Multiple circular constraints থাকলে radical axis এবং power-based decomposition ব্যবহার করো।

পোল এবং পোলার (Pole and Polar)

Circle-এর equation-এ $xx_1 + yy_1 = r^2$ ফর্মুলাটি শুধু tangent-এর জন্যই সত্যি নয়। যদি (x_1, y_1) বিন্দুটি circle-এর বাইরে থাকে, তবে এই একই সমীকরণটি একটি রেখা নির্দেশ করে, যাকে আমরা 'পোলার' (Polar) বলি। আর ওই (x_1, y_1) বিন্দুটিকে বলা হয় 'পোল' (Pole)।

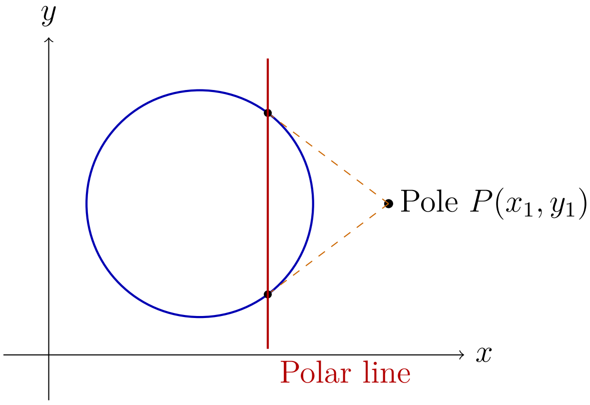
Pole এবং Polar

বৃত্ত $x^2 + y^2 = r^2$-এর সাপেক্ষে (x_1, y_1) বিন্দুর পোলারের সমীকরণ হলো:

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

যদি বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে থাকে, তবে পোলার হলো সেই জ্যা (Chord of contact) যা স্পর্শকগুলোর স্পর্শবিন্দুগুলো দিয়ে যায়।

এটি projective geometry-এর একটি চমৎকার ধারণা। তুমি পোলকে রেখার একটা 'বিন্দু-রূপ' ভাবতে পারো, আর পোলারকে বিন্দুর 'রেখা-রূপ'। Pole-polar-এর সবচেয়ে বড় সুবিধা হলো, অনেক জটিল concurrency (সমবিন্দু) এবং collinearity (সমরেখ) প্রমাণ এটি দিয়ে খুব সহজে করা যায়। La Hire's Theorem এর একটি ক্লাসিক উদাহরণ!



চিত্র ৭: একটি বহিস্থ বিন্দু (Pole) এবং তার Polar (Chord of contact)।

Advanced move: inversion

কিছু hard circle problem-এ inversion game changer. একটি fixed circle-এর সাপেক্ষে inversion নিলে line circle-এ, circle line-এ, আর tangled tangency pattern suddenly simpler structure-এ চলে আসে.

Inversion-এর core idea

Inversion center O এবং radius k হলে point P-এর image P' এমন যে

$$OP \cdot OP' = k^2.$$

এই transform circle geometry-তে powerful simplification আনে।

সব problem-এ inversion দরকার হবে না, কিন্তু যখন two tangents, common tangency, or awkward circular chain দেখা যায়, তখন এটা ভেবে দেখার মতো tool.

সবকিছু এক লাইনে জোড়া লাগাও

Circle-এর analytic storyটা আসলে খুব clean. Definition distance condition দেয়. Distance condition equation দেয়. Equation tangent, secant, power, radical axis, and fitting দেয়. Multiple circles system-level structure দেয়. Advanced tools like inversion hidden symmetry খুলে দেয়.

এটাই circle geometry-র আসল beauty:
small set of equations, huge range of consequences.

দ্রুত স্মরণযোগ্য সূত্র

- Standard circle: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
- General circle: $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$
- Center: $(-g,-f)$
- Radius: $\sqrt{g^2+f^2-c}$
- Tangent at $P(x_1,y_1)$: $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$
- Power of point: $PT^2=PA\cdot PB$
- Radical axis: two circle equations subtract করলেই line
- Three non-collinear points give one unique circle

অনুশীলন

1. Standard circle থেকে general equation derive করো, তারপর reverse direction complete square দিয়ে দেখাও।
2. Circle $x^2+y^2=25$-এর $(3,4)$ point-এ tangent-এর equation বের করো। তারপর verify করো যে tangent radius-এর perpendicular.
3. External point থেকে tangent-secant theorem derive করো।
4. Circle দুটির radical axis বের করো: $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ এবং $x^2+y^2+2x-2y-8=0$.
5. Three-point determinant form ব্যবহার করে একটি circle-এর equation বের করার চেষ্টা করো।
6. Orthogonal circles-এর condition center distance formula দিয়ে prove করো।
7. একটি practical geometry data set নিয়ে approximate circle fitting করার workflow লিখে ফেলো।

শেষ কথা

Circle problem solve করতে হলে শুধু formula মুখস্থ রাখলে হবে না; pattern দেখতে শিখতে হবে। Distance constraint, tangent, power, radical axis, এবং inversion—এইগুলো একে অন্যের সাথে connected. তুমি যদি এই connections বুঝে নাও, তাহলে circle geometry messy না, বরং খুব organized toolset মনে হবে।