Permutations, Combinations and the Art of Counting

পারমুটেশন, কম্বিনেশন ও কম্বিনেটরিক্স

Tawhid Bin Omar

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

May 23, 2026

কম্বিনেটরিক্স (Combinatorics) হলো গোনার বিজ্ঞান। তুমি হয়তো ভাবো, ``গোনা'' তো খুব সাধারণ ব্যাপার। কিন্তু বাস্তবে এই ``কতভাবে'' প্রশ্নটাই গণিত, কম্পিউটার সায়েন্স, সম্ভাব্যতা (probability), ক্রিপ্টোগ্রাফি, এমনকি জীববিজ্ঞানের ডিএনএ বিশ্লেষণেও অসাধারণ গুরুত্বপূর্ণ।

আজ আমরা এমনভাবে পারমুটেশন এবং কম্বিনেশন শিখব, যেন সূত্র মুখস্থ না করেও তুমি বুঝে সমস্যা সমাধান করতে পারো। মূল লক্ষ্য হলো:

- Order বা ক্রম গুরুত্বপূর্ণ হলে কী হবে?
- Order গুরুত্বপূর্ণ না হলে কী হবে?
- কখন multiplication principle ব্যবহার করবে?
- কখন case ভাগ করে গোনা ভালো?

কম্বিনেটরিক্সের প্রথম দারুণ আইডিয়া: Counting as Decisions

ধরো তোমাকে ৪ অঙ্কের একটি কোড বানাতে বলা হলো, প্রতিটি অঙ্ক 0--9 থেকে। প্রথম অঙ্কের জন্য ১০টি পছন্দ, দ্বিতীয় অঙ্কের জন্য ১০টি, তৃতীয়ের জন্য ১০টি, চতুর্থের জন্যও ১০টি।

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000$$

এটাই **Multiplication Principle**: ধারাবাহিক সিদ্ধান্তগুলো স্বাধীন হলে মোট উপায় = প্রতিটি ধাপের উপায়ের গুণফল।

Core Rule 1: Multiplication Principle

যদি একটি কাজ k ধাপে হয়, এবং প্রতিটি ধাপে যথাক্রমে $n_1, n_2, \dots, n_k$ উপায় থাকে, তবে মোট উপায়

$$N = n_1 n_2 \cdots n_k.$$

এটি কম্বিনেটরিক্সের ``শ্বাস-প্রশ্বাস''। প্রায় সব বড় সূত্র এখান থেকেই আসে।

Permutation: যখন ক্রম খুবই গুরুত্বপূর্ণ

Permutation মানে arrangement, অর্থাৎ একই জিনিসকে বিভিন্ন ক্রমে সাজানো।

ধরো A, B, C --- এই তিনজনকে লাইনে দাঁড় করাতে হবে। সম্ভাব্য ক্রম:

$$ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB,\ CBA$$

মোট ৬টি, যা $3!$।

Factorial এবং Total Permutation

nটি ভিন্ন বস্তুকে সম্পূর্ণভাবে সাজানোর উপায়:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1.$$

এখানে $0! = 1$ ধরা হয়। কারণ অনেক সূত্রকে সুন্দর ও একীভূত রাখতে এটি অপরিহার্য।

এখন যদি সবগুলো না নিয়ে r টি বস্তুকে n টি থেকে সাজাও?

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

কেন? প্রথম জায়গায় n টি পছন্দ, দ্বিতীয় জায়গায় $n-1$, ..., r-তম জায়গায় $n-r+1$।

$$^nP_r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\text{Seat 1} \xrightarrow{n \text{ choices}} \text{Seat 2} \xrightarrow{n-1 \text{ choices}} \text{Seat 3}$$

প্রতিটি সিট পূরণ মানে choice কমে যায়

চিত্র ১: পারমুটেশনে প্রতিটি নতুন অবস্থানে choice সংখ্যা কমে।

Combination: যখন ক্রম গুরুত্বপূর্ণ না

ধরো ৫ জন ছাত্র থেকে ২ জনকে টিমে নেওয়া হবে। এখানে AB আর BA একই টিম। তাই order গুরুত্বপূর্ণ নয়।

Combination Formula

n টি ভিন্ন বস্তু থেকে r টি বেছে নেওয়ার (order-ignore) উপায়:

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

এর পেছনের যুক্তি: প্রথমে r জনকে arrange করে ফেললে ^nP_r পাওয়া যায়, কিন্তু প্রতিটি দলকে $r!$ বার করে বেশি গোনা হয়। তাই $r!$ দিয়ে ভাগ করতে হয়।

Permutation এবং Combination-এর সম্পর্ক:

$$^nP_r = {^nC_r} \cdot r!$$

পারমুটেশন বনাম কম্বিনেশন: দ্রুত চিনে নেওয়ার কৌশল

Problem-Solving Insight 1: Order Test

নিজেকে প্রশ্ন করো: ``AB'' এবং ``BA'' কি আলাদা outcome?

- আলাদা হলে Permutation
- একই হলে Combination

এই এক লাইনের টেস্ট ৮০% ভুল কমিয়ে দেয়।

Problem-Solving Insight 2: Slot Thinking

লাইন/আসন/পাসওয়ার্ড/র‍্যাঙ্কিং টাইপ সমস্যা হলে slot ভাবো: প্রতিটি slot পূরণ করো। সাধারণত permutation বা multiplication principle আসে।

Problem-Solving Insight 3: Group Thinking

কমিটি/টিম/গ্রুপ/selection টাইপ সমস্যা হলে group ভাবো: কে আছে সেটাই matter, কোন ক্রমে আছে তা নয়। সাধারণত combination আসে।

Circular Permutation: বৃত্তাকার বিন্যাস

সাধারণত n জনকে লাইনে দাঁড় করাতে $n!$ উপায় লাগে। কিন্তু তাদের একটি গোল টেবিলে বসালে কী হবে? বৃত্তে শুরুর বা শেষের কোনো নির্দিষ্ট স্থান নেই। টেবিল ঘুরিয়ে দিলে মানুষগুলোর আপেক্ষিক অবস্থান একই থাকে।

Circular Permutation

n টি ভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সাজানোর উপায়:

$$(n-1)!$$

কেন? একজনকে ফিক্সড (fixed) করে দিলে বাকি $n-1$ জনের জন্য এটি একটি সাধারণ রৈখিক বিন্যাস হয়ে যায়।

বিঃদ্রঃ যদি ঘড়ির কাঁটার দিক (clockwise) ও বিপরীত দিক (anticlockwise) আলাদা না করা যায় (যেমন: মুক্তার মালা গাঁথা), তবে উপায় হবে $\frac{(n-1)!}{2}$।

Repetition থাকলে কী হবে?

১. Repetition Allowed (শব্দ/কোড টাইপ)

যদি n টি symbol থেকে r length-এর string বানাও এবং repetition allowed হয়:

$$n^r$$

কারণ প্রতিটি জায়গায় n টি choice স্বাধীনভাবে থাকে।

২. Repetition NOT allowed

তখন

$$^nP_r$$

৩. Indistinguishable objects (একই রকম বস্তু)

ধরো ``BANANA'' শব্দের অক্ষর সাজানো। মোট 6 অক্ষর, কিন্তু A তিনবার, N দুইবার।

$$\frac{6!}{3!2!}$$

এখানে একই অক্ষর অদলবদল করলে নতুন arrangement হয় না, তাই ভাগ করতে হয়।

Multiset Permutation

মোট n টি বস্তু, যেখানে একই ধরনের সংখ্যা $n_1, n_2, \ldots, n_k$ এবং $n_1 + \cdots + n_k = n$ হলে, পৃথক arrangement:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

আডিশন প্রিন্সিপল ও Casework

সব সমস্যা গুণফল দিয়ে হয় না। কখনও ``এইভাবে বা ওইভাবে'' হয়। তখন add করতে হয়।

Addition Principle

যদি outcome দুটি disjoint case থেকে আসে: case-A তে a উপায়, case-B তে b উপায়, এবং overlap না থাকে, তবে মোট $a + b$ উপায়।

উদাহরণ: ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত কতটি সংখ্যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য বা ৫ দ্বারা বিভাজ্য? এখানে overlap আছে (১৫ দ্বারা বিভাজ্য), তাই Inclusion-Exclusion লাগবে:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Stars and Bars: বস্তু বিতরণের ম্যাজিক

১০টি একরকম (identical) চকলেট ৩ জন বাচ্চার মধ্যে কতভাবে ভাগ করে দেওয়া যায়, যেন প্রত্যেকে অন্তত একটি চকলেট পায়? এটি সাধারণ Permutation বা Combination দিয়ে সহজে হয় না। এখানে আসে Stars and Bars বা বল ও বাক্স পদ্ধতি।

Stars and Bars Theorem 1 (অন্তত ১টি)

n টি identical বস্তুকে r টি ভিন্ন বক্সে ভাগ করার উপায়, যেন কোনো বক্স খালি না থাকে:

$$^{n-1}C_{r-1}$$

যুক্তি: n টি বস্তুর মাঝে $n-1$ টি গ্যাপ থাকে। r টা ভাগে ভাগ করতে হলে $r-1$ টি লাঠি (bar) বসাতে হবে।

Stars and Bars Theorem 2 (খালি থাকতে পারে)

n টি identical বস্তুকে r টি ভিন্ন বক্সে ভাগ করার উপায়, যেখানে বক্স খালি থাকতে পারে (0 টি করে পেতে পারে):

$$^{n+r-1}C_{r-1}$$

যুক্তি: আমরা n টি বস্তু এবং $r-1$ টি লাঠিকে মোট $n+r-1$ জায়গায় নিজেদের মধ্যে সাজাচ্ছি।

Pigeonhole Principle (PHP)

যদি তোমার কাছে ১০টি কবুতর থাকে এবং ৯টি খোপ (pigeonhole) থাকে, তবে অন্তত একটি খোপে ২ বা তার বেশি কবুতর থাকবেই।

Dirichlet's Pigeonhole Principle

n টি খোপে যদি $n+1$ বা তার বেশি বস্তু রাখা হয়, তবে অন্তত একটি খোপে একাধিক বস্তু থাকবে।

উদাহরণ: ঢাকা শহরে এমন অন্তত দুইজন মানুষ আছেন যাদের মাথায় চুলের সংখ্যা হুবহু সমান! (কারণ মানুষের মাথায় সর্বোচ্চ ৩ লাখ চুল থাকে, কিন্তু ঢাকার মানুষ তার চেয়ে অনেক বেশি।)

একটি Full Worked Example Set

উদাহরণ ১: ৮ জন থেকে সভাপতি, সম্পাদক, কোষাধ্যক্ষ কতভাবে?

এখানে পদ ভিন্ন, তাই order matters.

$$^8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336.$$

উদাহরণ ২: ৮ জন থেকে ৩ জনের কমিটি কতভাবে?

এখানে order matters না।

$$^8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

উদাহরণ ৩: ``MATHEMATICS'' শব্দের ভিন্ন arrangement কত?

অক্ষর সংখ্যা 11। পুনরাবৃত্তি: M(2), A(2), T(2)।

$$\frac{11!}{2!2!2!} = \frac{11!}{8} = 4{,}989{,}600.$$

উদাহরণ 8: ৬-digit সংখ্যা, প্রথম digit শূন্য নয়, digit repeat করা যাবে না

- প্রথম digit: 1--9 থেকে 9 উপায়
- দ্বিতীয় digit: বাকি 9 উপায় (0 সহ)
- তৃতীয় থেকে ষষ্ঠ: 8,7,6,5

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080.$$

Problem-Solving Insight 4: Restriction আগে handle করো

``প্রথম অঙ্ক শূন্য নয়'', ``পাশাপাশি বসতে পারবে না'', ``কমপক্ষে একজন'' --- এ ধরনের restriction প্রশ্নে প্রথমে restriction কে আলাদা করে ধরো। সরাসরি সূত্রে ঝাঁপ দিলে ভুল হওয়ার সম্ভাবনা বেশি।

কমপ্লিমেন্ট কৌশল (At least এক/দুই/...)

``কমপক্ষে'' ধরণের সমস্যা সরাসরি না করে complement দিয়ে করা সহজ। যেমন: ৫টি কয়েন ছুড়ে কমপক্ষে ১টি Head পাওয়ার উপায় (outcome count) কত?

$$\text{Total} = 2^5 = 32, \quad \text{No Head} = 1.$$

$$\therefore \text{At least one Head} = 32 - 1 = 31.$$

Complement Principle

``At least'' প্রশ্নে

$$\text{Required} = \text{Total} - \text{Unwanted}.$$

এটি time save করে এবং case explosion কমায়।

Binomial Coefficient-এর সৌন্দর্য

তুমি নিশ্চয় লক্ষ্য করেছো ^nC_r কেবল selection নয়, algebra-তেও আসে।

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r a^{n-r} b^r.$$

এখানে ^nC_r বলে দেয় কোন term কতভাবে গঠিত হচ্ছে।

আরও কিছু useful identity:

$${}^nC_r = {}^nC_{n-r}, \qquad {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r.$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

চিত্র ২: Pascal Triangle, যেখানে প্রতিটি সংখ্যা উপরের দুই সংখ্যার যোগফল

Advanced Intuition: Why combinatorics builds mathematical maturity

Combinatorics তোমাকে তিনটি শক্তিশালী দক্ষতা দেয়:

1. Structure দেখা: সমস্যা দেখে decision tree বা case tree বানাতে শেখো।
2. Overcounting ধরতে শেখা: একই outcome কতবার গোনা হচ্ছে তা বোঝো।
3. Clean expression লেখা: বড় গল্পকে ছোট সূত্রে নামিয়ে আনা।

এই কারণে অলিম্পিয়াড, ভর্তি পরীক্ষা, SAT/AMC টাইপ টেস্ট, এবং programming contest --- সব জায়গায় combinatorics এত জনপ্রিয়।

Problem-Solving Insight 5: Small Case Check

বড় সূত্রে যাওয়ার আগে ছোট মান বসাও (যেমন $n = 3, 4$) এবং হাতে গুনে মিলাও। যদি ছোট কেসে না মেলে, বড় কেসেও সূত্র ভুল। এই habit তোমার ভুল নাটকীয়ভাবে কমাবে।

Problem-Solving Insight 6: Label and Unlabel

প্রশ্নে object গুলো distinguishable না indistinguishable তা আগে ঠিক করো। ``৫টি ভিন্ন বল'' আর ``৫টি একই বল'' সম্পূর্ণ আলাদা সমস্যা।

অনুশীলনী (Practice Problems)

সমস্যাগুলো সহজ থেকে চ্যালেঞ্জিং ক্রমে সাজানো। চেষ্টা করো প্রথমে নিজে করতে, তারপর solution hint লিখে verify করতে।

1. ১০ জন ছাত্র থেকে ৪ জনের একটি টিম কতভাবে বেছে নেওয়া যায়?
2. ৮ জনকে একটি লাইনে কতভাবে দাঁড় করানো যায়, যদি দুইজন নির্দিষ্ট বন্ধু পাশাপাশি দাঁড়াতেই হবে?
3. ``COMBINATION'' শব্দের ভিন্ন arrangement কত?
4. 0--9 digit দিয়ে ৫ অঙ্কের কতটি সংখ্যা বানানো যায়, যেখানে: (ক) repetition allowed, (খ) repetition not allowed, (গ) প্রথম অঙ্ক শূন্য নয়।
5. ১২ জন থেকে সভাপতি, সহ-সভাপতি, সম্পাদক, কোষাধ্যক্ষ নির্বাচন কতভাবে?
6. ১০ জনের ক্লাস থেকে ৩ জনের কমিটি বানাতে হবে, কিন্তু A এবং B একসাথে কমিটিতে থাকতে পারবে না। মোট কতভাবে?
7. একটি বৃত্তাকার টেবিলে ৭ জন কতভাবে বসতে পারে? যদি দুইজন নির্দিষ্ট ব্যক্তি পাশাপাশি বসে, তখন কত?
8. ১ থেকে ২০০ পর্যন্ত কতটি সংখ্যা ৩ বা ৫ দ্বারা বিভাজ্য? Inclusion-Exclusion ব্যবহার করো।
9. প্রমাণ করো:
$$^nC_0 + {^nC_1} + \cdots + {^nC_n} = 2^n.$$
10. একটি binary string-এর দৈর্ঘ্য ১২। কতটি string-এ ঠিক ৪টি 1 আছে এবং কোনো দুইটি 1 পাশাপাশি নয়?
11. ১৫টি identical চকলেট ৪ জন বাচ্চার মাঝে কতভাবে ভাগ করা যায়, যেন প্রত্যেকে অন্তত ২টি করে চকলেট পায়? (Hint: প্রথমে সবাইকে ২টি করে দিয়ে দাও, তারপর বাকিগুলো ভাগ করো)
12. প্রমাণ করো: তুমি যেকোনো ৫টি পূর্ণসংখ্যা নিলে, তাদের মাঝে অন্তত দুটি সংখ্যা এমন থাকবে যাদের বিয়োগফল ৪ দ্বারা বিভাজ্য। (Pigeonhole Principle)