Eigenvalues and Eigenvectors

Tawhid Bin Omar

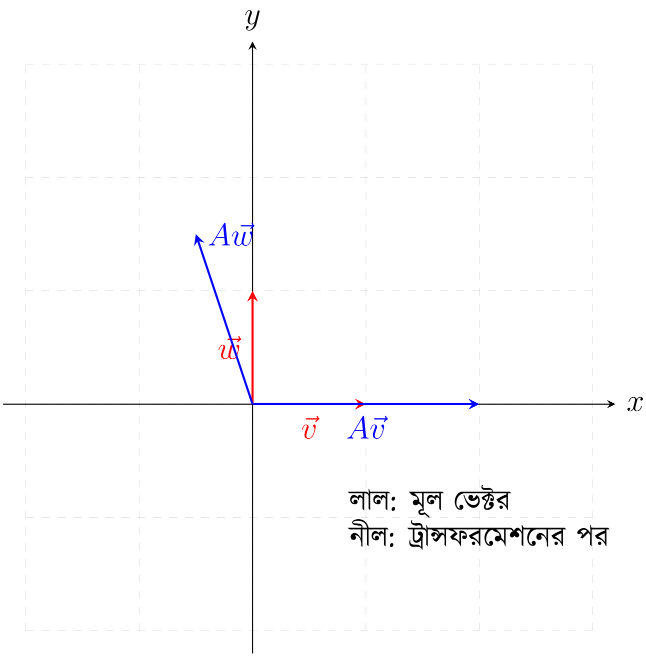
∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

February 27, 2026

লিনিয়ার অ্যালজেব্রার জগতে ম্যাট্রিক্সকে কেবল সংখ্যার টেবিল হিসেবে দেখলে অনেক কিছুই মিস করবে। ম্যাট্রিক্স আসলে একটি ফাংশন বা মেশিন, যা ভেক্টরকে ইনপুট নিয়ে আউটপুটে নতুন একটি ভেক্টর দেয়। একে আমরা বলি লিনিয়ার ট্রান্সফরমেশন।

বেশিরভাগ ভেক্টরের ক্ষেত্রে কী হয়? যখন একটি ম্যাট্রিক্স তাদের ওপর কাজ করে, তারা দিক বদলে ফেলে; অর্থাৎ ঘুরে যায় এবং লম্বায় ছোট বা বড় হয়। কিন্তু কিছু বিশেষ ভেক্টর আছে, যারা দিক বদলায় না। ম্যাট্রিক্স দিয়ে গুণ করার পরেও তারা তাদের নিজেদের স্প্যান বা রেখার ওপরই থাকে। শুধু তাদের দৈর্ঘ্য ছোট বা বড় হতে পারে, বা দিক সম্পূর্ণ উল্টে যেতে পারে (১৮০ ডিগ্রি)।

এই বিশেষ ভেক্টরগুলোই হলো **আইগেনভেক্টর** (Eigenvector), আর যে সংখ্যাটি দিয়ে তাদের দৈর্ঘ্য গুণ হয়, সেটি হলো **আইগেনভ্যালু** (Eigenvalue)।



চিত্র ১: এখানে $\vec{v}$ একটি আইগেনভেক্টর কারণ $A\vec{v}$ একই লাইনে আছে (শুধু দ্বিগুণ হয়েছে)। কিন্তু $\vec{w}$ আইগেনভেক্টর নয় কারণ $A\vec{w}$ দিক বদলে ফেলেছে।

Definition: Eigenvector and Eigenvalue

ধরা যাক A একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স। একটি অশূন্য ভেক্টর $\vec{v}$ কে A-এর আইগেনভেক্টর বলা হবে যদি এমন একটি স্কেলার λ (আইগেনভ্যালু) থাকে যেন:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

- যদি $\lambda > 1$ হয়, ভেক্টরটি লম্বা হয়।
- যদি $0 < \lambda < 1$ হয়, ভেক্টরটি ছোট হয়।
- যদি $\lambda < 0$ হয়, ভেক্টরটি দিক উল্টে ফেলে।

কেন এটি গুরুত্বপূর্ণ? কিছু বাস্তব প্রয়োগ

শুধু গণিতের খাতায় নয়, আইগেনভ্যালু ও আইগেনভেক্টর আমাদের চারপাশের জগতকে বুঝতে সাহায্য করে। নিচে কয়েকটি চমকপ্রদ উদাহরণ দেওয়া হলো:

1. **গুগল সার্চ ইঞ্জিন এবং পেজ র‍্যাঙ্ক (Google PageRank):** তুমি যখন গুগলে কিছু সার্চ করো, গুগল কীভাবে বোঝে কোন ওয়েবসাইটটি সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ? গুগল পুরো ইন্টারনেটকে একটি বিশাল গ্রাফ হিসেবে দেখে। প্রতিটি ওয়েবসাইট একটি নোড, আর লিংকগুলো হলো এজ। এই বিশাল নেটওয়ার্কের একটি "ট্রানজিশন ম্যাট্রিক্স" তৈরি করা হয়। এই ম্যাট্রিক্সের প্রধান আইগেনভেক্টর (Principal Eigenvector) বের করলেই বোঝা যায় কোন পেজটি সবচেয়ে প্রভাবশালী। যার আইগেনভ্যালু সবচেয়ে বেশি, সেই পেজটিই সার্চ রেজাল্টে সবার উপরে থাকে।

2. **কম্পন এবং সেতু ধ্বংস (Bridging the Gap):** প্রতিটি কঠিন বস্তুর নিজস্ব কিছু কম্পাঙ্ক বা ফ্রিকোয়েন্সি থাকে, যাকে "ন্যাচারাল ফ্রিকোয়েন্সি" বলে। এগুলো আসলে সেই বস্তুর কম্পন সমীকরণের আইগেনভ্যালু। যদি বাতাসের কম্পাঙ্ক বা ভূমিকম্পের কম্পাঙ্ক এই আইগেনভ্যালুর সাথে মিলে যায়, তবে "রেজোন্যান্স" তৈরি হয় এবং বস্তুটি ভেঙে পড়তে পারে। ১৮৩১ সালে ইংল্যান্ডের ব্রাইটন সাসপেনশন ব্রিজ সৈন্যদের মার্চ পাস্টের তালে তালে ভেঙে পড়েছিল, কারণ তাদের পায়ের তালের ফ্রিকোয়েন্সি ব্রিজের আইগেনভ্যালুর সাথে মিলে গিয়েছিল!

3. **আইগেনফেস এবং ফেস রিকগনিশন (Eigenfaces):** কম্পিউটার ভিশনে মানুষের মুখ চেনার জন্য "আইগেনফেস" পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। হাজার হাজার মুখের ছবির ডাটাবেস থেকে তাদের সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলো (যেমন চোখের দূরত্ব, নাকের গঠন) বের করা হয়। এই বৈশিষ্ট্যগুলো আসলে ডাটাগুলোর কোভেরিয়েন্স ম্যাট্রিক্সের আইগেনভেক্টর। নতুন কোনো মুখ দেখলে কম্পিউটার এই আইগেনভেক্টরগুলোর সাথে মিলিয়ে দেখে তাকে চিনে নেয়।

4. **কোয়ান্টাম মেকানিক্স:** পরমাণুর জগতে আইগেনভ্যালু ছাড়া চলা অসম্ভব। কোয়ান্টাম মেকানিক্সে যে অপারেটরগুলো দিয়ে আমরা শক্তি বা ভরবেগ মাপি, তাদের আইগেনভ্যালুই হলো সেই পরিমাপের সম্ভাব্য ফলাফল। যেমন, হ্যামিলটোনিয়ান অপারেটরের আইগেনভ্যালুগুলো হলো একটি সিস্টেমের শক্তির স্তর (Energy Levels)।

ভাবো তো, তুমি একটি জটিল ঘূর্ণায়মান বস্তু বা একটি সিস্টেম নিয়ে কাজ করছো। পুরো সিস্টেমটি এলোমেলো মনে হতে পারে। কিন্তু যদি তুমি এমন কিছু অক্ষ (axis) খুঁজে বের করতে পারো যা স্থির থাকে, তাহলে পুরো সমস্যাটি অনেক সহজ হয়ে যায়। আইগেনভেক্টরগুলো সেই "প্রাকৃতিক অক্ষ" হিসেবে কাজ করে।

হিসাব করার পদ্ধতি

সমীকরণটি দেখো:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

একে একপাশে নিয়ে আসলে পাই:

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

যেহেতু আমরা চাই $\vec{v}$ একটি অশূন্য ভেক্টর হোক, তাই ম্যাট্রিক্স $(A - \lambda I)$-এর ডিটারমিন্যান্ট শূন্য হতে হবে। এটি আমাদের আইগেনভ্যালু বের করার চাবিকাঠি দেয়।

Characteristic Equation

আইগেনভ্যালু λ বের করার জন্য সমাধান করতে হয়:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

একে ক্যারেক্টারিস্টিক ইকুয়েশন (Characteristic Equation) বলা হয়।

একটি উদাহরণ

চলো একটি ম্যাট্রিক্স দেখি:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

এটি কী করে? এটি ভেক্টরকে প্রসারিত করে এবং একটু ঘুরিয়ে দেয়। আমরা এর আইগেনভ্যালু বের করব।

ক্যারেক্টারিস্টিক ইকুয়েশন:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(2-\lambda) - (1)(1) = 0$$

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(2-\lambda)^2 = 1 \implies 2-\lambda = \pm 1$$

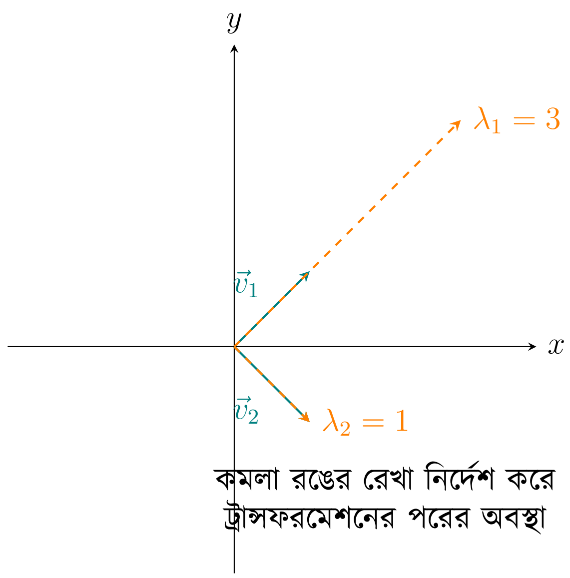
সুতরাং, $\lambda_1 = 3$ এবং $\lambda_2 = 1$।

এখন $\lambda_1 = 3$-এর জন্য আইগেনভেক্টর বের করি।

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

এখান থেকে পাই $-x + y = 0$ বা $y = x$। অর্থাৎ ভেক্টর $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$। এর মানে হলো, তুমি যদি $(1, 1)$ ভেক্টরকে ম্যাট্রিক্স A দিয়ে গুণ করো, তুমি পাবে $(3, 3)$, যা ঠিক ৩ গুণ লম্বা, কিন্তু দিক একই!



চিত্র ২: আইগেনভেক্টরগুলোর দিক পরিবর্তন হয় না।

বিস্তারিত উদাহরণ: পদার্থবিজ্ঞান ও কম্পিউটার সায়েন্স

আমরা তো দেখলাম আইগেনভ্যালু কোথায় কোথায় লাগে। চলো এবার গাণিতিকভাবে দেখি কীভাবে এগুলো কাজ করে।

১. পদার্থবিজ্ঞান: কাপল্ড অসিলেটর (Coupled Oscillator)

ধরো, দুইটি বল স্প্রিং দিয়ে যুক্ত। একটি নাড়ালে অন্যটিও নড়বে। তাদের গতি কেমন হবে?

নিউটনের সূত্র ব্যবহার করে আমরা গতির সমীকরণ পাই। যদি আমরা ম্যাট্রিক্স আকারে লিখি, তবে সমীকরণটি দাঁড়ায়:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k/m & k/m \\ k/m & -2k/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

এখানে $\ddot{x}$ হলো ত্বরণ। আমরা যদি ধরি স্পন্দনের কম্পাঙ্ক ω, তবে আমাদের সমাধান হবে $x(t) = ve^{i\omega t}$। এটি বসালে আমরা একটি আইগেনভ্যালু সমস্যা পাই:

$$A\vec{v} = -\omega^2 \vec{v}$$

এখানে ম্যাট্রিক্স A-এর আইগেনভেক্টরগুলো আমাদের বলে দেয়ে **"নরমাল মোড"** (Normal Modes) কী।

- একটি আইগেনভেক্টর হবে $\vec{v}_1 = (1, 1)$। এর মানে দুইটি বল একসাথে একই দিকে দুলছে (তালে তাল মিলিয়ে)।
- অন্য আইগেনভেক্টর হবে $\vec{v}_2 = (1, -1)$। এর মানে দুইটি বল একে অপরের বিপরীত দিকে দুলছে।

আইগেনভ্যালু আমাদের বলে দেয় এই দুলুনির ফ্রিকোয়েন্সি বা কম্পাঙ্ক কত হবে।

২. কম্পিউটার সায়েন্স: পেজ র‍্যাঙ্ক (PageRank)

গুগল কীভাবে কাজ করে তার একটি অতি সরল মডেল দেখি। ধরো, ইন্টারনেটে মাত্র ৩টি ওয়েবসাইট আছে: A, B, এবং C।

- **A** লিংক দেয় **B**-তে।
- **B** লিংক দেয় **A** এবং **C**-তে।
- **C** লিংক দেয় **A**-তে।

আমরা একটি "লিংক ম্যাট্রিক্স" M তৈরি করি যেখানে M_{ij} মানে হলো j থেকে i-তে আসার সম্ভাবনা।

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

এখানে ২য় কলামে 0.5 কারণ B থেকে দুইটি লিংক বের হয়েছে, তাই A-তে আসার সম্ভাবনা ৫০%।

আমরা এমন একটি ভেক্টর $\vec{r}$ চাই যা স্থির থাকবে, অর্থাৎ $M\vec{r} = 1 \cdot \vec{r}$। এটি আসলে আইগেনভ্যালু ১-এর জন্য আইগেনভেক্টর বের করা। গণনা করে দেখা যাবে, এই ম্যাট্রিক্সের জন্য আইগেনভেক্টরটি প্রায়:

$$\vec{r} \approx \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

এর মানে, এই ছোট ইন্টারনেটে A এবং B-এর গুরুত্ব সমান (৪০%), আর C-এর গুরুত্ব কম (২০%)। আসল পেজ র‍্যাঙ্কে ঠিক এভাবেই কোটি কোটি পেজের গুরুত্ব বের করা হয়!

ট্রেস এবং ডিটারমিন্যান্টের জাদু

আইগেনভ্যালু বের না করেও কি আমরা সেগুলো সম্পর্কে কিছু বলতে পারি? হ্যাঁ, পারি! যেকোনো $n \times n$ ম্যাট্রিক্স A-এর আইগেনভ্যালুগুলো যদি $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ হয়, তবে দুটি চমৎকার সূত্র আছে:

Properties

1. **Sum of Eigenvalues = Trace:**

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}(A)$$

ট্রেস বা $\mathrm{tr}(A)$ হলো ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের (Main Diagonal) উপাদানগুলোর যোগফল।

2. **Product of Eigenvalues = Determinant:**

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(A)$$

কেন এমন হয়?

ক্যারেক্টারিস্টিক ইকুয়েশনটি মনে আছে? $\det(A - \lambda I) = 0$। একে বহুপদী বা পলিনোমিয়াল আকারে লিখলে আমরা পাই:

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

এই রাশিটিকে গুণ করে দিলে:

- λ^0 বা ধ্রুবক পদটি আসলে সব λ-এর গুণফল (চিহ্নসহ)। আবার $\lambda = 0$ বসালে আমরা পাই $\det(A)$। তাই গুণফলটি ডিটারমিন্যান্টের সমান।
- λ^{n-1}-এর সহগটি আসে সব λ-এর যোগফল থেকে। আবার ম্যাট্রিক্সের বিস্তৃতি থেকেও দেখা যায় যে এটি কর্ণের উপাদানগুলোর যোগফল।

উদাহরণ যাচাই: আমাদের আগের ম্যাট্রিক্সটি ছিল $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$।

- আইগেনভ্যালু পেয়েছিলাম: 3 এবং 1।
- যোগফল: $3 + 1 = 4$। ম্যাট্রিক্সের ট্রেস: $2 + 2 = 4$। (মিলে গেল!)
- গুণফল: $3 \times 1 = 3$। ম্যাট্রিক্সের ডিটারমিন্যান্ট: $(2 \times 2) - (1 \times 1) = 3$। (মিলে গেল!)

এই ট্রিকটি ব্যবহার করে তুমি অনেক সময় পুরো অংক না করেই এমসিকিউ (MCQ) বা ছোট প্রশ্নের উত্তর চেক করতে পারবে।

আইগেনভেক্টর এবং আইগেনভ্যালুর ধারণা লিনিয়ার সিস্টেম, ডিফারেনশিয়াল ইকুয়েশন, এবং কোয়ান্টাম মেকানিক্স বুঝতে অপরিহার্য। তুমি যখনই কোনো লিনিয়ার অপারেটর দেখবে, নিজেকে প্রশ্ন করবে: "এর আইগেনভেক্টরগুলো কী?" কারণ সেখানেই লুকিয়ে থাকে অপারেটরটির আসল চরিত্র।

অনুশীলনী

1. ম্যাট্রিক্স $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$-এর ট্রেস (trace) এবং ডিটারমিন্যান্ট বের করো। দেখাও যে ট্রেস $\lambda_1 + \lambda_2$-এর সমান এবং ডিটারমিন্যান্ট $\lambda_1\lambda_2$-এর সমান।

2. এমন একটি 2×2 ম্যাট্রিক্স ভাবো যা x-অক্ষের সাপেক্ষে রিফ্লেক্ট করে। এর জ্যামিতিক আইগেনভেক্টরগুলো কী হতে পারে? (হিসাব না করে ছবি এঁকে ভাবো)।

3. ম্যাট্রিক্স $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$। এটি ৯০ ডিগ্রি রোটেশন। এর কি কোনো বাস্তব (real) আইগেনভেক্টর থাকা সম্ভব? কেন নয়?