General Relativity and Spacetime

Understanding the Fabric of the Universe

Tawhid Bin Omar

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

May 27, 2026

গ্যালিলিওর আপেক্ষিকতা (Galilean Relativity)

ধরে নাও তুমি একটি ট্রেনের ভেতর বসে আছো, যেটির জানালা পুরোপুরি বন্ধ এবং ট্রেনটি সমবেগে (constant velocity) চলছে। তুমি যদি একটি বল ওপরের দিকে ছুঁড়ে দাও, সেটি ঠিক তোমার হাতেই এসে পড়বে। ট্রেনের বাইরের কেউ স্থির হয়ে থাকলেও ঠিক একই ঘটনা ঘটতো। মহাবিশ্বে 'পরম স্থিতি' (absolute rest) বলে কিছু নেই। এই ধারণাটিকেই গ্যালিলিওর আপেক্ষিকতা বা Galilean Relativity বলা হয়। গ্যালিলিয়ান ট্রান্সফরমেশনে সমীকরণগুলো খুবই সরল: যদি ট্রেনটি v বেগে যায়, তবে $x' = x - vt$ এবং সময় $t' = t$। অর্থাৎ, তুমি এবং প্ল্যাটফর্মে দাঁড়িয়ে থাকা পর্যবেক্ষক, দুজনের কাছেই সময়ের প্রবাহ সমান।

অপরিবর্তনীয়তা (Invariance): আপেক্ষিকতার গাণিতিক ভিত্তি

ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎচুম্বকীয় সমীকরণগুলো প্রমাণ করলো আলোর একটি নির্দিষ্ট বেগ (c) আছে। কিন্তু এই বেগ কার সাপেক্ষে? এখানেই পদার্থবিজ্ঞানে ঝড় ওঠে। অ্যালবার্ট আইনস্টাইন বললেন, আলোর বেগ সব পর্যবেক্ষকের জন্য ইনভ্যারিয়েন্ট বা অপরিবর্তনীয়! তুমি স্থির থাকো বা আলোর বেগের কাছাকাছি বেগে ছোটো, আলোর বেগ সবসময় c-ই মাপবে।

Principle of Invariance

১. ফিজিক্সের সূত্রগুলো সকল ইনারশিয়াল ফ্রেমে একই রূপ ধারণ করে।
২. শূন্যমাধ্যমে আলোর বেগ (c) সব পর্যবেক্ষকের সাপেক্ষে ধ্রুবক।

এই ইনভ্যারিয়েন্স নিশ্চিত করতে গিয়েই আমাদের স্পেস এবং টাইমের সনাতন ধারণাকে ভেঙে নতুন করে গড়তে হলো, যার জন্ম হলো স্পেশাল রিলেটিভিটি বা বিশেষ আপেক্ষিকতায় (Special Relativity)।

কোভ্যারিয়েন্ট এবং কন্ট্রাভ্যারিয়েন্ট (Covariance and Contravariance)

রিলেটিভিটির গভীরে যাওয়ার আগে একটু ভেক্টর ক্যালকুলাস ঝালাই করা যাক। স্পেসটাইমে পয়েন্ট বা পজিশন বোঝাতে আমরা ফোর-ভেক্টরের (4-vector) সাহায্য নিই। এদের কম্পোনেন্টগুলো বেসিস পরিবর্তনের সাথে কীভাবে পরিবর্তিত হয়, তার ভিত্তিতে এদের দুটি ক্লাসে ভাগ করা যায়:

১. কন্ট্রাভ্যারিয়েন্ট ভেক্টর (Contravariant Vector): এদের ইনডেক্স ওপরে লেখা হয় (যেমন x^μ)। তুমি যদি বেসিস ভেক্টরগুলোকে দ্বিগুণ করো, এদের কম্পোনেন্ট অর্ধেক হয়ে যাবে। এরা বেসিসের ঠিক উল্টো বা 'কন্ট্রা' আচরণ করে। আমাদের পরিচিত পজিশন বা ভেলোসিটি ভেক্টরগুলো কন্ট্রাভ্যারিয়েন্ট।

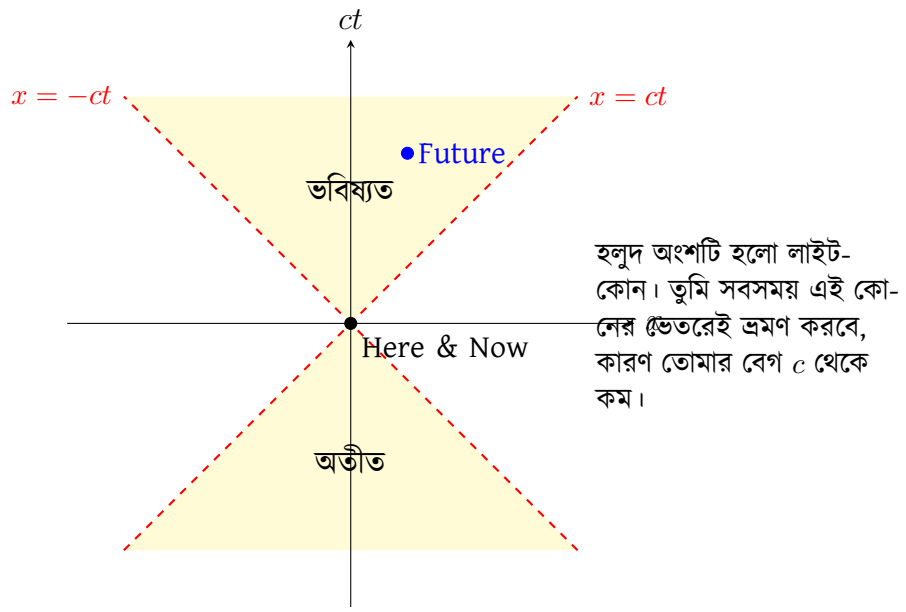
$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

২. কোভ্যারিয়েন্ট ভেক্টর (Covariant Vector): এদের ইনডেক্স নিচে লেখা হয় (যেমন p_μ)। এদের অনেকসময় কো-ভেক্টর বা ডুয়াল ভেক্টর বলা হয়। এরা গ্রেডিয়েন্টের মতো আচরণ করে, অর্থাৎ বেসিস দ্বিগুণ হলে এদের কম্পোনেন্টও একই অনুপাতে বাড়ে।

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

স্পেসটাইম ডায়গ্রাম এবং স্পেসটাইম ইন্টারভাল

স্পেস এবং টাইমকে আলাদা না ভেবে আমরা এদের একটি ৪-মাত্রিক ক্যানভাসে কল্পনা করি, যাকে স্পেসটাইম বা মিনকোস্কি স্পেস (Minkowski space) বলে। স্পেসটাইম ডায়গ্রামে সাধারণত y-অক্ষে ct এবং x-অক্ষে স্পেসিয়াল দূরত্ব রাখা হয়। আলো এই ডায়গ্রামে ৪৫ ডিগ্রি কোণে চলে।



চিত্র ১: স্পেসটাইম ডায়গ্রাম এবং লাইটকোন (Lightcone)

সাধারণ জ্যামিতিতে দুটি বিন্দুর দূরত্ব $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ সবসময় অপরিবর্তনশীল (Invariant)। কিন্তু স্পেসটাইমে দূরত্ব বা ইন্টারভাল মাপার সমীকরণটি ভিন্ন:

Spacetime Interval Vector & Invariance

$$ds^2 = -(ct)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

তুমি স্থির থাকো বা রকেটে চড়ে যাও, এই ds^2 এর মান সবার জন্য হুবহু এক থাকবে। এটি স্পেশাল রিলেটিভিটির সবচেয়ে শক্তিশালী হাতিয়ার!

ইউক্লিডিয়ান এবং মিনকোস্কি মেট্রিক টেনসর

দূরত্ব মাপার এই টুলটিকে বলা হয় মেট্রিক টেনসর (Metric Tensor), যাকে $g_{\mu\nu}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। ইউক্লিডিয়ান স্পেসে এটি কেবল একটি আইডেন্টিটি ম্যাট্রিক্স δ_{ij}::

$$g_{\text{Euclidean}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

কিন্তু স্পেসটাইমের দূরত্ব সংজ্ঞায়িত হয় মিনকোস্কি মেট্রিক (Minkowski metric) দিয়ে, যাকে $\eta_{\mu\nu}$ বলা হয়। এর একটি উপাদানের চিহ্ন নেগেটিভ হয়:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

লরেন্টজ ট্রান্সফরমেশন, কাল দীর্ঘায়ন ও দৈর্ঘ্য সংকোচন

যেহেতু ds^2 অপরিবর্তনীয়, তাই গ্যালিলিওর $x' = x - vt$ সূত্র আর খাটবে না। এর জায়গায় আসবে লরেন্টজ

ট্রান্সফরমেশন। এটি মূলত স্পেসটাইমে এক ধরণের 'রোটেশন' বা ঘূর্ণন!

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

যেখানে লরেন্টজ ফ্যাক্টর $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$।

Time Dilation and Length Contraction

কাল দীর্ঘায়ন (Time Dilation): $t = \gamma t_0$ গতিশীল ঘড়ি স্থির ঘড়ির চেয়ে ধীরে চলে।
দৈর্ঘ্য সংকোচন (Length Contraction): $L = \frac{L_0}{\gamma}$ গতিশীল বস্তু গতির দিকে সংকুচিত হয়ে যায়।

বেগের সংযোজন এবং সমকালীনতার আপেক্ষিকতা

ধরো, স্পেসশিপ থেকে তুমি আলোর বেগের অর্ধেক বেগে (0.5c) একটি মিসাইল ছুঁড়লে, আর স্পেসশিপটিও 0.5c বেগে চলছে। বাইরে থেকে কি মিসাইলের বেগ c মনে হবে? না! আইনস্টাইনের রিলেটিভিস্টিক ভেলোসিটি অ্যাডিশন সূত্র অনুযায়ী:

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} = \frac{0.5c + 0.5c}{1 + 0.25} = \frac{c}{1.25} = 0.8c$$

আরেকটি অদ্ভুত বিষয় হলো Relativity of Simultaneity বা সমকালীনতার আপেক্ষিকতা। তোমার ফ্রেম থেকে যে দুটি ঘটনা ঠিক একই সময়ে (simultaneous) ঘটছে বলে মনে হচ্ছে, গতিশীল অন্য কোনো রেফারেন্স ফ্রেম থেকে দেখলে তা আগে-পরে ঘটবে। "একই সময়" বলতে পরম কোনো ব্যাপার এই মহাবিশ্বে নেই!

হাইপারবোলিক মোশন এবং রিন্ডলার হরাইজন (Rindler Horizon)

তুমি যদি একটি রকেটে বসে ক্রমান্বয়ে সমত্বরণে (constant proper acceleration) চলতে থাকো, তবে তুমি কখনোই আলোর বেগ পার হতে পারবে না। স্পেসটাইম ডায়গ্রামে তোমার চলার পথটি হবে একটি হাইপারবোলা: $x^2 - (ct)^2 = \alpha^2$। তুমি যতই ত্বরিত হতে থাকবে, তোমার পেছনে একটি কাল্পনিক রেখা তৈরি হবে, যার পেছনের আলো কখনোই তোমাকে ধরতে পারবে না। স্পেসটাইমের এই অদেখা সীমানাকেই বলা হয় **রিন্ডলার হরাইজন** (Rindler Horizon)। এটি অনেকটা ব্ল্যাকহোলের ইভেন্ট হরাইজনের মতোই কাজ করে!

টেনসর (Tensors): জেনারেল রিলেটিভিটির ভাষা

জেনারেল রিলেটিভিটি বুঝতে হলে তোমাকে টেনসর চিনতে হবে। ভেক্টর যেমন দিক এবং মান নির্দিষ্ট করে, টেনসর হলো তার এক ধাপ ওপরের কনসেপ্ট। সোজা কথায়, টেনসর হলো এমন একটি রৈখিক ফাংশন, যা কিছু ভেক্টর ও কোভেক্টরকে ইনপুট নিয়ে একটি স্কেলার আউটপুট দেয়। "A tensor is something that transforms like a tensor", এটি কোঅর্ডিনেট সিস্টেম পরিবর্তন করলেও নিজের ভৌত ধর্ম হারায় না (covariance)।

স্পেসটাইম কার্ভেচার (Spacetime Curvature)

আইনস্টাইন তাঁর সাধারণ আপেক্ষিকতায় (General Relativity) নিউটনের মধ্যাকর্ষণকে নাকচ করে দিলেন। তিনি বললেন, মধ্যাকর্ষণ কোনো ফোর্স বা বল নয়! ভর তার চারপাশের স্পেসটাইমকে বাঁকিয়ে (curve) দেয়। আর বস্তু সেই বাঁকানো স্পেসের সবচেয়ে সোজা পথ (যাকে জিওডেসিক বা Geodesic বলে) ধরে চলতে থাকে, যা আমাদের চোখে আকর্ষণ বা গ্র্যাভিটি বলে মনে হয়। বিখ্যাত পদার্থবিদ জন আর্চিবল্ড হুইলারের ভাষায়:

"Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve."

স্ট্রেস-এনার্জি-মোমেন্টাম টেনসর

স্পেসটাইমকে কে বাঁকায়? শুধু ভর নয়! শক্তি (Energy), ভরবেগ (Momentum), চাপ (Pressure), এবং শিয়ার স্ট্রেস (Shear stress), সবাই মিলে এই কার্ভেচার তৈরি করে। এদের সবাইকে একত্রে একটি 4×4 ম্যাট্রিক্সে প্রকাশ করা হয়, যাকে স্ট্রেস-এনার্জি-মোমেন্টাম টেনসর $T_{\mu\nu}$ বলা হয়। এর T_{00} উপাদানটি হলো এনার্জি ডেনসিটি বা ভরের ঘনত্ব।

আইনস্টাইনের ফিল্ড ইকুয়েশন (Einstein Field Equations)

পুরো জেনারেল রিলেটিভিটির প্রাণভোমরা হলো আইনস্টাইনের ফিল্ড ইকুয়েশন। এটি জ্যামিতির সাথে ভর-শক্তিকে যুক্ত করে।

Einstein Field Equations

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

এখানে বামপাশের অংশ ($R_{\mu\nu}, R$) স্পেসটাইমের কার্ভেচার বা জ্যামিতি বোঝায়, আর ডানদিক ($T_{\mu\nu}$) হলো ভর ও শক্তির বিস্তৃতি। Λ হলো কসমোলজিক্যাল কনস্ট্যান্ট, যা ডার্ক এনার্জি বা মহাবিশ্বের সম্প্রসারণের সাথে সম্পর্কিত।

শোয়ার্জশাইল্ড মেট্রিক এবং সাইন কনভেনশন

আইনস্টাইনের ফিল্ড ইকুয়েশনের প্রথম নির্ভুল সমাধান দিয়েছিলেন কার্ল শোয়ার্জশাইল্ড (Karl Schwarzschild)। একটি স্থির, গোলাকার ভর (যেমন নক্ষত্র বা ব্ল্যাকহোল) তার চারপাশের স্পেসটাইমকে কেমন বাঁকাবে, তা এই মেট্রিক দিয়ে বের করা যায়:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

এখানে $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ হলো শোয়ার্জশাইল্ড রেডিওয়াস, যা ব্ল্যাকহোলের ইভেন্ট হরাইজনকে নির্দেশ করে।
বিঃদ্রঃ সাইন কনভেনশন: গণিতবিদ এবং আপেক্ষিকতাবাদীরা সাধারণত ds^2-এর জন্য $(-,+,+,+)$ কনভেনশন ব্যবহার করেন (যেমন আমরা ওপরে করেছি)। কিন্তু পার্টিকেল ফিজিক্সে প্রায়ই $(+,-,-,-)$ ব্যবহার করা হয়। দুটোই ঠিক, শুধু খেয়াল রাখতে হবে তুমি কোনটা ধরে কাজ করছ!

প্রবলেম সলভিং ইনসাইটস (Problem Solving Insights)

Tips for Solving Relativity Problems

১. **অপরিবর্তনীয়তা খুঁজো:** যে কোনো প্রশ্নে প্রথমেই ds^2 বা ফোর-মোমেন্টামের ইনভ্যারিয়েন্ট $p^\mu p_\mu = -(mc)^2$ সমীকরণটি ব্যবহার করার চেষ্টা করো। এর মান সবার জন্য এক থাকে বলে ফ্রেম পরিবর্তন করলেও এটি ধ্রুবক থাকে।
২. **সঠিক ফ্রেম বেছে নাও:** সবসময় এমন একটি রেফারেন্স ফ্রেম বা স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা ধরবে যেখানে হিসাব করা সবচেয়ে সহজ। যেমন "সেন্টার অফ মোমেন্টাম" (CM) ফ্রেম বা বস্তুর ঘড়ির (Proper time) সাপেক্ষে।
৩. **ড□□□□ এবং ফ্রি ইনডেক্স মেলাও:** টেনসরের ইকুয়েশনে সবসময় ইনডেক্সগুলো ব্যালেন্স করবে। সমীকরণের দুইপাশেই ফ্রি ইনডেক্সগুলো (যেগুলো যোগ করা হচ্ছে না) যেন সমান পজিশনে (উপরে বা নিচে) থাকে।

অনুশীলনী (Problems)

1. **মিউয়ন ক্ষয় (Muon Decay):** বায়ুমণ্ডলের উপরিভাগে তৈরি হওয়া মিউয়ন কণার আয়ুষ্কাল অনেক কম (প্রায় ২ মাইক্রোসেকেন্ড)। নিউটনিয়ান মেকানিক্স অনুসারে এরা ভূপৃষ্ঠে পৌঁছানোর আগেই নিঃশেষ হয়ে যাওয়ার কথা। কিন্তু বাস্তবে আমরা ভূপৃষ্ঠে অনেক মিউয়ন পাই। টাইম ডাইলেশন এবং লেংথ কন্ট্রাকশনের কনসেপ্ট ব্যবহার করে তুমি কি ব্যাখ্যা করতে পারবে কেন এমন হয়?

2. **ইনভ্যারিয়েন্ট চেক:** লরেন্টজ ট্রান্সফরমেশনগুলো (x' এবং t') ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে, $-(ct)^2 + x^2 = -(ct')^2 + (x')^2$। অর্থাৎ স্পেসটাইম ইন্টারভাল সত্যিই ইনভ্যারিয়েন্ট।

3. **ব্ল্যাকহোল হরাইজন:** শোয়ার্জশাইল্ড মেট্রিকে $r = r_s$ বসালে সমীকরণের কালবাচক (dt) এবং স্থানবাচক (dr) অংশগুলোতে কী ঘটে? এটি ফিজিক্যালি ব্ল্যাকহোলের স্পেসটাইমে কী ইঙ্গিত দেয় তা ব্যাখ্যা করো।