# Graph Theory

## গ্রাফ থিওরি

Tawhid Bin Omar

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

May 27, 2026

# 1 ভূমিকা: সাতটি সেতুর গল্প এবং গ্রাফ থিওরির জন্ম

১৭৩৬ সালের কথা। প্রুশিয়ার কনিগসবার্গ (Konigsberg) শহরে একটি মজার ধাঁধা মানুষের মুখে মুখে ঘুরতো। শহরটির মাঝখান দিয়ে বয়ে গেছে প্রেগেল (Pregel) নদী। নদীর মাঝে দুটি বড় দ্বীপ এবং নদীর দুই পাড় মিলিয়ে মোট চারটি ভূখণ্ড। এই চারটুকরো মাটিকে যুক্ত করেছিল মোট সাতটি সেতু। ধাঁধাটি ছিল: এমন কি কোনো পথ আছে, যাতে হাঁটা শুরু করে প্রতিটি সেতু ঠিক একবার করে পার হয়ে আবার শুরুর জায়গায় ফিরে আসা যায়?

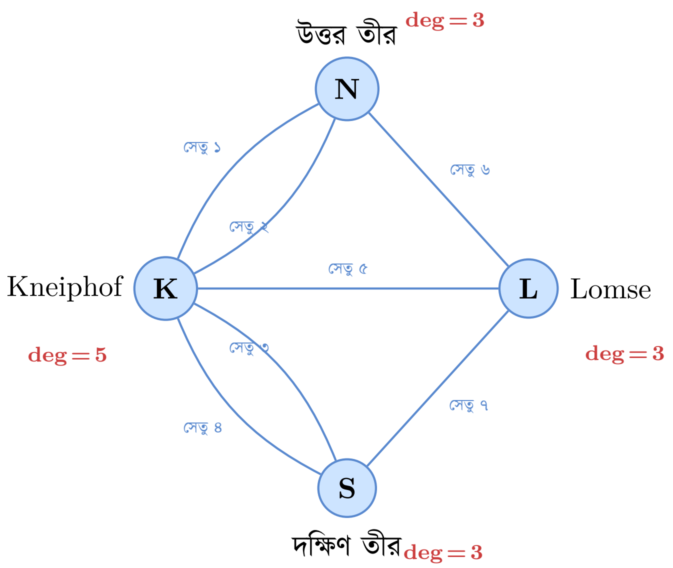
বিখ্যাত গণিতবিদ লিওনারদ অয়লার (Leonhard Euler) যখন এই সমস্যাটি সমাধান করতে বসলেন, তখন তিনি এক যুগান্তকারী কাজ করে বসলেন। তিনি দেখলেন, ভূখণ্ডটির আকৃতি বা সেতুর দৈর্ঘ্য এখানে মোটেও গুরুত্বপূর্ণ নয়। গুরুত্বপূর্ণ হলো কে কার সাথে যুক্ত! তাই তিনি চারটি ভূখণ্ডকে চারটি বিন্দু বা ভার্টেক্স (Vertex) এবং সাতটি সেতুকে সাতটি রেখা বা এজ (Edge) হিসেবে কল্পনা করলেন। জন্ম নিলো গণিতের এক নতুন ও শক্তিশালী শাখা---**গ্রাফ থিওরি**!

**Eulerian Graphs & Paths**

একটি গ্রাফকে **অয়লারিয়ান** (Eulerian) বলা হবে যদি এর প্রতিটি এজ বা ধার ঠিক একবার অতিক্রম করে পুরো গ্রাফটি ঘুরে আসা যায়। অয়লার প্রমাণ করেছিলেন, একটি কানেক্টেড (Connected) গ্রাফে এমন একটি পথ (Eulerian Circuit) থাকা সম্ভব হবে যদি এবং কেবল যদি গ্রাফের প্রতিটি ভার্টেক্সের ডিগ্রি (অর্থাৎ সেই বিন্দু থেকে বের হওয়া এজের সংখ্যা) **জোড়** (Even) হয়।

যদি ঠিক দুটি ভার্টেক্সের ডিগ্রি বিজোড় হয়, তবে সেই দুটি ভার্টেক্সকে শুরু ও শেষ ধরে একটি Eulerian Path (সার্কিট নয়) পাওয়া সম্ভব।

কনিগসবার্গের চারটি ভূখণ্ডের তিনটির ডিগ্রি ছিল $3$ এবং একটির (Kneiphof দ্বীপ) ডিগ্রি ছিল $5$। যেহেতু সবগুলোই বিজোড়, অয়লার নিশ্চিতভাবে প্রমাণ করে দিলেন যে এমন কোনো পথ থাকা গাণিতিকভাবেই অসম্ভব!




*কনিগসবার্গের সাত সেতু — গ্রাফ হিসেবে উপস্থাপন। সব ডিগ্রি বিজোড় $\Rightarrow$ Eulerian Circuit অসম্ভব।*

## 2 সেতু থেকে বিন্দুতে: হ্যামিল্টনিয়ান গ্রাফ ও ট্রাভেলিং সেলসম্যান

অয়লার আমাদের শিখিয়েছিলেন কীভাবে প্রতিটি *এজ* ঠিক একবার ঘুরতে হয়। কিন্তু যদি আমরা প্রতিটি এজ না ঘুরে, প্রতিটি *ভার্টেক্স* ঠিক একবার ঘুরে আসতে চাই? তখন আমরা যে গ্রাফের দর্শন পাই তাকে বলা হয় **হ্যামিল্টনিয়ান গ্রাফ** (Hamiltonian Graph)। এটি আইরিশ গণিতবিদ উইলিয়াম রোয়ান হ্যামিল্টনের নামানুসারে রাখা। দাবা খেলার নাইট্স ট্যুর (Knight's Tour) এর একটি দারুণ উদাহরণ, যেখানে দাবার ঘোড়াকে বোর্ডের ৬৪টি ঘরেই ঠিক একবার করে যেতে হয়।

হ্যামিল্টনিয়ান পাথ বের করা আপাতদৃষ্টিতে অয়লারিয়ান পাথের মতো মনে হলেও, এটি আসলে অনেক বেশি কঠিন। এর উপর ভিত্তি করেই তৈরি হয়েছে বিখ্যাত **ট্রাভেলিং সেলসম্যান প্রবলেম** (TSP): একজন সেলসপার্সন কীভাবে সবচেয়ে কম দূরত্বে অনেকগুলো শহর ঠিক একবার করে ঘুরে আবার নিজের শহরে ফিরে আসতে পারবে? আজও এটি কম্পিউটার সায়েন্সের অন্যতম কঠিন (NP-Hard) একটি সমস্যা!

**অয়লারিয়ান বনাম হ্যামিল্টনিয়ান: মূল পার্থক্য**

| Eulerian Path/Circuit | Hamiltonian Path/Circuit |
|---|---|
| প্রতিটি *এজ* ঠিক একবার | প্রতিটি *ভার্টেক্স* ঠিক একবার |
| শর্ত সহজেই যাচাইযোগ্য | শর্ত যাচাই করা NP-Complete |
| Degree condition দিয়ে সমাধানযোগ্য | কোনো সহজ বৈশিষ্ট্য নেই |

## 3 সমতলে গ্রাফ: প্ল্যানারিটি ও অয়লারের ফর্মুলা

তুমি যখন একটি গ্রাফ খাতায় আঁকো, তখন অনেক সময় রেখাগুলো একে অপরকে ছেদ করে। কিন্তু এমন কি করা সম্ভব যে, কোনো রেখা বা এজ একে অপরকে না কেটেই পুরো গ্রাফটি আঁকা যাবে? যদি যায়, তবে সেই গ্রাফটিকে বলা হয় **প্ল্যানার গ্রাফ** (Planar Graph)।

গ্রাফ প্ল্যানার হলে একটি জাদুকরী ঘটনা ঘটে। লিওনারদ অয়লার এখানেও তাঁর একটি বিখ্যাত সূত্র দিয়ে গেছেন।

**Euler's Formula for Planar Graphs**

যেকোনো **কানেক্টেড প্ল্যানার গ্রাফের** জন্য, যদি $V$ হলো ভার্টেক্সের সংখ্যা, $E$ হলো এজের সংখ্যা, এবং $F$ হলো ফেইস বা অঞ্চলের সংখ্যা (বাইরের অসীম অঞ্চলসহ), তবে সব সময় নিচের ধ্রুব সমীকরণটি মেনে চলে:

$$V - E + F = 2$$

উদাহরণ: একটি ঘনক (Cube) গ্রাফে $V = 8,\ E = 12,\ F = 6$, তাই $8 - 12 + 6 = 2$। ✓

কিন্তু একটি গ্রাফ প্ল্যানার কি না তা কীভাবে বুঝবে? পোলিশ গণিতবিদ কাজিমিয়ের্জ কুরাতোস্কি

(Kuratowski) এটি সমাধানের এক চমৎকার পদ্ধতি বের করলেন।

**Kuratowski's Theorem**

একটি গ্রাফ **প্ল্যানার** হবে যদি এবং কেবল যদি এর ভেতরে $K_5$ (৫-ভার্টেক্স বিশিষ্ট একটি কমপ্লিট গ্রাফ) অথবা $K_{3,3}$ (৩ করে ভাগ করা একটি বাইপারটাইট গ্রাফ) এর মতো কোনো সাবডিভিশন বা উপাংশ লুকিয়ে না থাকে। অর্থাৎ, এই দুটি গ্রাফ হলো প্ল্যানার হওয়ার পথে **নিষিদ্ধ ছাঁচ** (Forbidden Minors)!

এই ধারণাটিকেই অনেক পরে রবার্টসন এবং সেম্যুর (Robertson & Seymour) তাঁদের স্মৃতিস্তম্ভসম **গ্রাফ মাইনরস থিওরেম** (Graph Minors Theorem) দিয়ে আরও বিশদ করেছেন। তারা দেখিয়েছেন যে, যেকোনো গ্রাফ বৈশিষ্ট্যের জন্যই কিছু নিষিদ্ধ মাইনর থাকে, যা গ্রাফের অসীম পরিবারের গঠন বুঝতে সাহায্য করে।

## 4 রং তুলির খেলা: ফোর কালার থিওরেম ও গ্রাফ কালারিং

প্ল্যানার গ্রাফের ধারণা থেকে গণিতের সবচেয়ে বিখ্যাত কালারিং প্রবলেমের জন্ম --- ১৮৫২ সালের ম্যাপ কালারিং প্রবলেম। একটি ম্যাপে অনেকগুলো দেশ থাকলে, অন্তত কয়টি রং ব্যবহার করে পুরো ম্যাপটি এমনভাবে রাঙানো যায় যেন পাশাপাশি দুটি দেশের রং কখনো এক না হয়? এখানে প্রতিটি দেশ হলো একটি ভার্টেক্স, আর তাদের সীমানা হলো এজ।

১৯৭৬ সালে কেনেথ অ্যাপেল এবং উলফগ্যাং হ্যাকেন কম্পিউটার ব্যবহার করে প্রমাণ করেছিলেন যে **মাত্র চারটি রং-ই** যেকোনো প্ল্যানার গ্রাফ বা ম্যাপ রং করার জন্য যথেষ্ট! এটিই গাণিতিক ইতিহাসে কম্পিউটারের সাহায্যে প্রমাণিত প্রথম বড় থিওরেম, যা **ফোর-কালার থিওরেম** (Four-Color Theorem) নামে পরিচিত।

এছাড়াও গ্রাফের রং করা নিয়ে ব্রুকস ও ভিজিং-এর গুরুত্বপূর্ণ থিওরেম আছে।

**Coloring Theorems**

- **Brooks' Theorem:** একটি গ্রাফের ভার্টেক্স রং করতে সর্বোচ্চ $\Delta$ রং লাগে, যেখানে $\Delta$ হলো গ্রাফের সর্বোচ্চ ডিগ্রি (কমপ্লিট গ্রাফ এবং বিজোড় সাইকেল ছাড়া)।
- **Vizing's Theorem:** এজগুলোকে রং করতে $\Delta$ অথবা $\Delta + 1$ টি রং লাগে। এই দুই শ্রেণিকে Class 1 এবং Class 2 গ্রাফ বলে।
- **Chromatic Polynomial:** $P(G,k)$ পলিনোমিয়ালটি নির্দেশ করে কতভাবে গ্রাফটিকে $k$ রঙে রং করা যায়।

## 5 সম্পর্ক ও দল গঠন: হলস ম্যারেজ থিওরেম ও রামসে থিওরি

গ্রাফ থিওরি দিয়ে ম্যাচিং বা জোড়া মেলানোর দারুণ সব কাজ করা যায়। ধরো, একটি কোম্পানিতে কিছু চাকরিপ্রার্থী (Applicant) আছে এবং কিছু নির্দিষ্ট কাজ (Job) আছে। সবাই সব কাজে পারদর্শী নয়। এখন, সবাইকে কি এমনভাবে একটি করে কাজ দেওয়া সম্ভব যেন কোনো কাজই ফাঁকা না থাকে?

**Hall's Marriage Theorem**

একটি বাইপারটাইট গ্রাফে (যেখানে ভার্টেক্স দুটি দলে বিভক্ত এবং এজ শুধু এক দল থেকে অন্য দলে যায়) সম্পূর্ণ ম্যাচিং সম্ভব হবে যদি এবং কেবল যদি **ম্যারেজ কন্ডিশন** পূর্ণ হয়।

**কন্ডিশন:** যেকোনো ভার্টেক্সের সাবসেট $S$ এর জন্য, তাদের কানেক্টেড প্রতিবেশীদের সেটের আকার $|N(S)|$ অবশ্যই $|S|$ এর চেয়ে বড় বা সমান হতে হবে:

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{for all } S$$

সহজ ভাষায়: $|S|$ জন চাকরিপ্রার্থীর অন্তত $|S|$ টি ভিন্ন কাজের যোগ্যতা থাকতে হবে!

কখনো ভেবেছ, তুমি যদি একটি গ্রাফের এজগুলোকে ইচ্ছেমতো লাল আর নীল রং করো, তুমি কি এমন কিছু তৈরি করতে পারবে যাতে কোনো প্যাটার্ন নেই? জবাব হলো, না! **রামসে থিওরি** (Ramsey Theory) আমাদের বলে, *সম্পূর্ণ বিশৃঙ্খলা অসম্ভব (Complete disorder is impossible)*।

এর সবচেয়ে বিখ্যাত উদাহরণটি হলো **পার্টি প্রবলেম**: একটি পার্টিতে অন্তত কতজন মানুষ থাকলে, আমরা নিশ্চিত করে বলতে পারব যে সেখানে অন্তত ৩ জন একে অপরের আগের পরিচিত, অথবা অন্তত ৩ জন একে অপরের কাছে সম্পূর্ণ অচেনা? উত্তর হলো ৬ জন! গাণিতিকভাবে একে $R(3,3) = 6$ লেখা হয়। গ্রাফ যতই বড় হবে, তার ভেতরে শৃঙ্খলা একটি নির্দিষ্ট স্ট্রাকচার বা ক্লিক (Clique) তৈরি হতেই হবে।

# 6 বাস্তব জগতে প্রয়োগ: নেটওয়ার্ক, রাস্তা এবং অ্যালগরিদম

তুমি যখন গুগল ম্যাপে এক জায়গা থেকে অন্য জায়গায় যাওয়ার ডিরেকশন খোঁজ, ব্যাকএন্ডে একটি গ্রাফ থিওরি অ্যালগরিদম কাজ করে। এগুলো ওয়েটেড গ্রাফে (Weighted Graph) কাজ করে, যেখানে প্রতিটি এজে একটি দূরত্ব বা খরচ দেওয়া থাকে।

- **শর্টেস্ট পাথ** (Shortest Path): **ডেইকস্ট্রার অ্যালগরিদম** (Dijkstra's Algorithm) ব্যবহার করে সবচেয়ে কম দূরত্বের পথ বের করা হয়। কিন্তু যদি রাস্তায় নেগেটিভ ওয়েট থাকে, তবে **বেলম্যান-ফোর্ড** (Bellman-Ford) অ্যালগরিদম ব্যবহার করতে হয়। সকল জোড়ার মধ্যে শর্টেস্ট পাথের জন্য Floyd-Warshall অ্যালগরিদম ব্যবহার হয়।
- **মিনিমাম স্প্যানিং ট্রি** (Minimum Spanning Tree): তুমি যদি একটি শহরে বিদ্যুতের তার বা ব্রডব্যান্ড নেটওয়ার্ক বিছাতে চাও, যেন সব বাড়ি কানেক্টেড থাকে এবং খরচ সবচেয়ে কম হয়, তবে তোমাকে স্প্যানিং ট্রি বের করতে হবে। এটি নিমিষেই করে দেয় **ক্রুস্কাল** (Kruskal's) বা **প্রিম** (Prim's) অ্যালগরিদম।

গ্রাফের আরেকটি চমৎকার প্রয়োগ হলো ধারণক্ষমতা বা ম্যাক্স ফ্লো প্রবলেম। একটি পাইপলাইনের নেটওয়ার্ক দিয়ে তুমি সর্বোচ্চ কী পরিমাণ পানি পাঠাতে পারবে?

**Max-Flow Min-Cut Theorem**

**ফোর্ড-ফুলকারসন অ্যালগরিদম** (Ford-Fulkerson) দিয়ে এটি সমাধান করা হয়। এই যুগান্তকারী থিওরেমটি বলে:

$$\textit{একটি নেটওয়ার্কের সর্বোচ্চ ফ্লো} = \textit{নেটওয়ার্কের মিনিমাম কাটের মান।}$$

যেখানে **মিনিমাম কাট** হলো সেই সংযোগগুলোর সেট যেগুলো কেটে দিলে নেটওয়ার্কটি দুই ভাগ হয়ে যায় এবং যাদের মোট ক্যাপাসিটি সবচেয়ে কম। এটি সাপ্লাই চেইন, এয়ারলাইন শিডিউল এবং ইন্টারনেট ট্রাফিকে প্রতিনিয়ত ব্যবহার হচ্ছে।

লিওনারদ অয়লারের একটি সাধারণ কৌতূহল থেকে শুরু হওয়া গ্রাফ থিওরি আজ কম্পিউটার সায়েন্স, বায়োলজি, কেমিস্ট্রি, সোসিওলজি সহ বিজ্ঞানের প্রতিটি শাখায় রাজত্ব করছে। গ্রাফ আসলে কোনো ছবি নয়, এটি একটি ভাষা---**সম্পর্কের ভাষা!**

## 7 প্রবলেম সলভিং ইনসাইটস (Problem Solving Insights)

**Tips & Tricks in Graph Theory**

**১. ডিগ্রি দিয়ে চিন্তা করো:**

যেকোনো গ্রাফের সমস্যায় প্রথমেই ভার্টেক্সগুলোর ডিগ্রি খেয়াল করো। **হ্যান্ডশেকিং লেমা** (Handshaking Lemma) অনুযায়ী:

$$\sum_{\text{all vertices}} \deg(v) = 2|E|$$

কাজেই বিজোড় ডিগ্রির ভার্টেক্সের সংখ্যা সবসময় জোড় হবে! এটি অনেক প্রমাণকে এক লাইনে সমাধান করে দেয়।

**২. রুট বা শুরু কোথায়:**

যদি শর্টেস্ট পাথ বা ট্রির সমস্যা হয়, তবে একটি ভার্টেক্সকে রুট (Root) ধরে নাও। গ্রাফটিকে স্তর অনুযায়ী BFS Tree হিসেবে ভাগ করলে অনেক জটিল কাঠামোগত সমস্যা সহজ হয়ে যায়।

**৩. কালারিং এবং বাইপারটাইট প্রপার্টি:**

কোনো গ্রাফে অড-সাইকেল (বিজোড় সংখ্যক এজের বদ্ধ লুপ) আছে কি না তা বের করতে গ্রাফটির রং করার কথা চিন্তা করো। যদি ২ রঙে পুরো গ্রাফ রং করা যায়, তবে গ্রাফটি বাইপারটাইট এবং এতে কোনো অড-সাইকেল নেই!

**৪. ইনডাকশন ও ইনভেরিয়েন্ট:**

ট্রি বা কানেক্টেড গ্রাফের প্রমাণে প্রায়ই ইন্ডাকশন কাজে আসে। মনে রেখো, একটি ট্রিতে সবসময় $V-1$ সংখ্যক এজ থাকে এবং যেকোনো দুটি ভার্টেক্সের মধ্যে ঠিক একটিমাত্র পথ থাকে।

## 8 অনুশীলনী

1. একটি ঘরে ৯ জন মানুষ আছে। এমন কি হওয়া সম্ভব যে, প্রত্যেকে ঠিক ৩ জনের সাথে করমর্দন (Handshake) করেছে? (*হিন্ট:* হ্যান্ডশেকিং লেমা অনুযায়ী সব ডিগ্রির যোগফল এজ সংখ্যার দ্বিগুণ হতে হবে।)

2. একটি তলে ৫টি বিন্দুর প্রতিটিকে একে অপরের সাথে রেখা দিয়ে যুক্ত করো ($K_5$ গ্রাফ)। অয়লারের সূত্র $V - E + F = 2$ এবং একটি সাধারণ সীমাবদ্ধতা ($E \leq 3V - 6$) ব্যবহার করে গাণিতিকভাবে প্রমাণ করো যে, রেখাগুলো একে অপরকে ছেদ না করে $K_5$ আঁকা কোনোভাবেই সম্ভব নয়।

3. তুমি একটি দাবা বোর্ডে (সাধারণ $8 \times 8$ গ্রিড) ঘোড়া (Knight) চালনা করছ। এটি কি একটি বাইপারটাইট গ্রাফ তৈরি করে? যদি হ্যাঁ, তবে ঘোড়ার প্রতিটি চালে কোন প্যাটার্নটি দেখা যায়? (হিন্ট: কালো ও সাদা ঘরের কথা ভাবো।)

4. একটি কানেক্টেড গ্রাফ $G$-তে $V = 10$ এবং $E = 15$। গ্রাফটি প্ল্যানার হলে এটি কতটি ফেইস বা অঞ্চল তৈরি করবে? অয়লারের সূত্র ব্যবহার করো।

5. প্রমাণ করো যে, $K_{3,3}$ গ্রাফে কোনো Eulerian Circuit নেই, কিন্তু একটি Eulerian Path আছে।