Jacobian Matrix

জ্যাকোবিয়ান ম্যাট্রিক্স

Tawhid Bin Omar

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

May 27, 2026

ভূমিকা: ওয়ান-ডাইমেনশনাল স্কেলিং

ক্যালকুলাসে সাবস্টিটিউশন রুল (Substitution Rule) আমাদের সবার পরিচিত। ধরো তুমি $\int f(x)dx$ বের করছ। যদি তুমি একটি নতুন চলক u আনো, যেখানে $x = g(u)$, তবে তুমি শুধু dx -এর জায়গায় du লিখে দাও না, বরং একটি আংশিক ডেরিভেটিভ গুণ করে লেখো:

$$dx = g'(u)du = \frac{dx}{du}du$$

এখানে $\frac{dx}{du}$ কী? এটি হলো একটি রৈখিক স্কেলিং ফ্যাক্টর (Scaling Factor)। তুমি যখন u স্পেস থেকে x -এ রূপান্তর করছ, তখন ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য du পরিমাণটি কতটুকু প্রসারিত বা সংকুচিত হচ্ছে, তা নির্ধারণ করে এই ডেরিভেটিভ। কিন্তু যদি আমরা টু-ডি (2D) স্পেসে থাকি (যেমন x, y) এবং দুটি নতুন চলক (যেমন u, v) ব্যবহার করে নতুন কোঅর্ডিনেট সিস্টেমে যেতে চাই, তখন ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল $dxdy$ কীভাবে পাল্টাবে? এই প্রশ্নের উত্তরই হলো জ্যাকোবিয়ান (Jacobian)।

স্থানাঙ্ক রূপান্তর (Coordinate Transformations)

কার্তেসীয় (Cartesian) স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বলতে আমরা বুঝি একটি নিখুঁত বর্গাকার গ্রিড (Square Grid)। কিন্তু ক্ষেত্রবিশেষে এই গ্রিড আমাদের কাজের জন্য সুবিধাজনক হয় না। বৃত্তাকার কোনো ক্ষেত্র বা সিলিন্ডারের আয়তন মাপতে গেলে আমাদের সোজা গ্রিডটিকে বাঁকিয়ে পোলার (Polar) বা সিলিন্ড্রিক্যাল স্থানাঙ্কে নিয়ে যেতে হয়।

যখন তুমি (u, v) স্পেস থেকে (x, y) স্পেসে একটি রূপান্তর ঘটাও, তুমি মূলত গ্রিড লাইনগুলোকে বাঁকাচ্ছ, টানছ এবং দুমড়েমুচড়ে দিচ্ছ। একটি সুন্দর বর্গক্ষেত্র $\Delta u \Delta v$ রূপান্তরের পর একটি অদ্ভুত আকৃতির বাঁকা বহুভুজে পরিণত হতে পারে। তাহলে এর ক্ষেত্রফল কীভাবে মাপব?

জ্যাকোবিয়ান ম্যাট্রিক্স: কেন এভাবেই সংজ্ঞায়িত? (Why Jacobian is Defined This Way?)

ধরো আমাদের কাছে দুটি ফাংশন আছে: $x = f(u, v)$ এবং $y = g(u, v)$। পুরো রূপান্তরটি (Transformation) হয়তো অনেক জটিল ও বাঁকানো (Non-linear)। কিন্তু ক্যালকুলাসের সবচেয়ে বড় শক্তি হলো **লোকাল লিনিয়ারিটি (Local Linearity)**। তুমি যদি কোনো বক্ররেখার খুব খুব গভীরে (Zoom in) যাও, তবে সেটি দেখতে একটি সরলরেখার মতোই লাগবে।

টেইলর সিরিজের (Taylor Expansion) সাহায্যে এই "জুম ইন" করা ক্ষুদ্র পরিবর্তনগুলোকে লেখা যায়:

$$dx \approx \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$$
$$dy \approx \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

এবার এটিকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করা যাক:

The Local Linear Transformation

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

এই যে ম্যাট্রিক্সটি আমরা পেলাম, যা আংশিক অন্তরজ বা ডেরিভেটিভ দিয়ে সাজানো, এটিই হলো **জ্যাকোবিয়ান ম্যাট্রিক্স** (Jacobian Matrix, J)! খুব ক্ষুদ্র পরিসরে, যেকোনো জটিল রূপান্তর আসলে এই ম্যাট্রিক্সটি দ্বারা একটি সাধারণ রৈখিক রূপান্তর (Linear Transformation)।

জ্যামিতিক ও গ্রাফিক্যাল ইনসাইট (Geometric & Graphical Insight)

এখন প্রশ্ন হলো, একটি ম্যাট্রিক্স কীভাবে ক্ষেত্রফল (Area) পরিবর্তন করে? লিনিয়ার অ্যালজেবরার দুর্দান্ত একটি সত্য হলো: **যেকোনো রৈখিক রূপান্তরে ক্ষেত্রফল বা আয়তন বৃদ্ধির হার হলো ওই রূপান্তর ম্যাট্রিক্সটির ডিটারমিন্যান্ট (Determinant) এর সমান!**

Determinant as an Area Scaler

যদি একটি ভেক্টর স্পেসে আমরা একটি একক বর্গক্ষেত্র কল্পনা করি, তবে একটি ম্যাট্রিক্স M দিয়ে ট্রান্সফর্ম করার পর সেই বর্গক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিকে (Parallelogram) পরিণত হয়। সেই সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হলো $|\det(M)|$।

যেহেতু অতি ক্ষুদ্র অংশে আমাদের জটিল রূপান্তরটি জ্যাকোবিয়ান ম্যাট্রিক্স J দিয়ে প্রকাশ করা যায়, তাই $dudv$ ক্ষেত্রের ক্ষুদ্র বর্গটি $dxdy$ স্পেসে গিয়ে একটি সামান্তরিকে রূপান্তরিত হবে যার ক্ষেত্রফল হবে:

$$dA_{x,y} = |\det(J)|\, dA_{u,v}$$

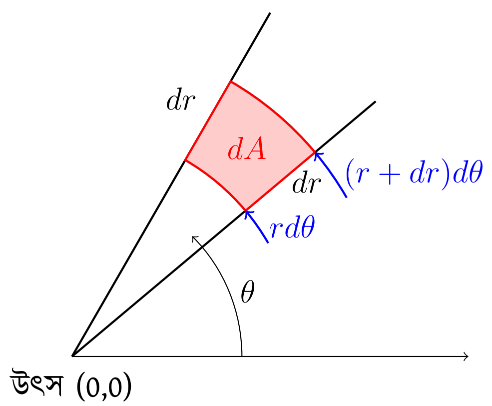
অর্থাৎ,

$$dxdy = |\det(J)| dudv = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv$$

এটাই হলো ডাবল ইন্টিগ্রালে ডিউ ডিভি (du dv) বসানোর পেছনের আসল জাদু। জ্যাকোবিয়ান হলো সেই লোকাল জুম লেন্স যা বলে দিচ্ছে স্থানাঙ্ক পরিবর্তনের ফলে ক্ষেত্রফল কতটুকু প্রসারিত বা সংকুচিত হলো!

কার্তেসীয় থেকে পোলার: প্রথমত জ্যামিতিক প্রমাণ

পোলার স্থানাঙ্কে আমরা (x, y) এর বদলে (r, θ) ব্যবহার করি। চলো কোনো ম্যাট্রিক্স সূত্র হুবহু মুখস্ত না করে কেবল জ্যামিতিক ছবি কল্পনা করে এর ক্ষেত্রফলের পরিবর্তন বের করি।



চিত্র ২: পোলার গ্রিডে একটি ক্ষুদ্র আয়তাকার অংশ (Wedge-shaped element)

চিত্রে দেখো, লাল রঙের শেড দেওয়া পোলার গ্রিডের অংশটির ক্ষেত্রফল হলো dA। তুমি যদি একে খুব জুম করে দেখো, তবে এটি একটি বাঁকানো আয়তক্ষেত্রের মতো লাগবে। এই আয়তক্ষেত্রটির দুই পাশের দৈর্ঘ্য কী কী?

- ব্যাসার্ধ বরাবর এর সোজা দৈর্ঘ্য হলো dr।
- চাপ বরাবর এর প্রস্থ নির্ভর করে এটি কেন্দ্র থেকে কতটা দূরে আছে তার ওপর। বৃত্তচাপের সূত্র $s = r\theta$ থেকে আমরা জানি, ক্ষুদ্র কোণ $d\theta$ এর জন্য চাপ হবে $rd\theta$।

সুতরাং ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফলটি হবে এদের গুণফল:

$$dA \approx (dr)(rd\theta) = r\,dr\,d\theta$$

ম্যাজিকের মতো একটি এক্সট্রা r এসে হাজির হলো! কেন্দ্র থেকে যত দূরে যাবে, একই dr আর $d\theta$ দিয়ে তৈরি গ্রিড বক্সগুলো তত বড় হতে থাকবে। এই বৃদ্ধি বা স্কেলিং রেশিওটাই হলো r।

কার্তেসীয় থেকে পোলার: জ্যাকোবিয়ানের সাহায্যে প্রমাণ

এবার চলো আমরা আমাদের মহাশক্তিশালী জ্যাকোবিয়ান মেথড দিয়ে এই r এর উপস্থিতি প্রমাণ করি। কার্তেসীয় ও পোলারের সম্পর্ক হলো:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

আমরা $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ জ্যাকোবিয়ান ম্যাট্রিক্সটি তৈরি করি:

Jacobian for Polar Coordinates

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

এবার এই ম্যাট্রিক্সের ডিটারমিন্যান্ট (Determinant) বের করো:

$$\det(J) = (\cos\theta)(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)(\sin\theta)$$

$$\det(J) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

দুটো পদ্ধতিই আমাদের একদম একই জায়গায় পৌঁছে দিল! $dxdy = \det(J)drd\theta = r\,dr\,d\theta$। এটি শুধু কাকতালীয় নয়, বরং এটাই প্রমাণ করে যে আমাদের জ্যামিতিক অন্তর্দৃষ্টি (Geometric Insight) এবং জ্যাকোবিয়ানের বীজগণিতীয় কাঠামো একই সূত্রের দুই পিঠ। জ্যাকোবিয়ান মূলত জ্যামিতিক স্ট্রেচিংকেই ক্যালকুলাসের ভাষায় বলছে!

প্রবলেম সলভিং ইনসাইটস (Problem Solving Insights)

Tips & Tricks with Jacobian

১. **সঠিক রূপান্তর নির্বাচন (Choosing the Right Transformation):** ইন্টিগ্রেশনের সীমা (limits) বা ফাংশনটি যদি অদ্ভুত আকৃতির হয়, তবে এমন একটি রূপান্তর ভাববে যা একে সহজ (যেমন বৃত্ত বা আয়তক্ষেত্র) করে তোলে। যেমন উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ থাকলে, $x = au, y = bv$ ধরে নিলে এটি একটি সহজ বৃত্ত $u^2+v^2 = 1$ হয়ে যায়। তখন জ্যাকোবিয়ান হবে ab।

২. **ইনভার্স জ্যাকোবিয়ান (Inverse Jacobian Property):** মাঝে মাঝে ফাংশনগুলো এমনভাবে দেওয়া থাকে যে, x, y দিয়ে u, v নির্দেশ করা সহজ কিন্তু u, v দিয়ে x, y বের করা কঠিন। ঘাবড়ানোর কিছু নেই! ইনভার্স ম্যাট্রিক্সের প্রপার্টি থেকে আমরা জানি, $\det(J_{u,v}) = \frac{1}{\det(J_{x,y})}$ অর্থাৎ, উল্টো ম্যাট্রিক্সের ডিটারমিন্যান্ট বের করে তাকে উল্টে দিলেই কাজ শেষ!

উন্মুক্ত চিন্তা ও প্র্যাকটিস (Problems for Open-Ended Exploration)

1. **গোলকীয় স্থানাঙ্ক (Spherical Coordinates):** থ্রি-ডি স্পেসে স্ফেরিক্যাল কোঅর্ডিনেটের রূপান্তরগুলো হলো:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\phi$$

এর জ্যাকোবিয়ান ম্যাট্রিক্সটি (যা একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স হবে) বের করো এবং দেখাও যে এর ডিটারমিন্যান্ট হলো $\rho^2 \sin\phi$। এটি জ্যামিতির সাহায্যে (একটি ছোট থ্রি-ডি স্ফেরিক্যাল ওয়েজ ছবি এঁকে) কীভাবে প্রমাণ করবে?

2. **গাউসিয়ান ইন্টিগ্রাল জাদুকরী (Gaussian Integral):** পৃথিবীর অন্যতম বিখ্যাত একটি ইন্টিগ্রেশন হলো $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$। একে সরাসরি সমাধান করা প্রায় অসম্ভব। কিন্তু যদি একে বর্গ করে ডাবল ইন্টিগ্রালে নিয়ে $dxdy$ এর জায়গায় জ্যাকোবিয়ান ব্যবহার করে পোলার কোঅর্ডিনেটে $r\,dr\,d\theta$ তে রূপান্তর করা যায়, তবে এটি মুহূর্তেই সমাধান হয়ে যায়। তুমি কি এটি চেষ্টা করে দেখতে পারবে?

3. **রম্বসের ক্ষেত্রফল (Area of a Parallelogram):** চারটি রেখা দিয়ে ঘেরা একটি চতুর্ভুজ: $y = 2x, y = 2x - 3, y = -x, y = -x + 4$। $u = y - 2x$ এবং $v = y + x$ ধরে জ্যাকোবিয়ানের ইনভার্স রুল ব্যবহার করে এর ক্ষেত্রফল বের করো।