Legendre Polynomials and generating functions

লিজেন্ডার পলিনোমিয়াল এবং জেনারেটিং ফাংশন

Tawhid Bin Omar

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

May 23, 2026

গণিতের জগতে অনেক জটিল সমস্যা আছে যেগুলো সমাধান করতে গেলে মনে হয় যেন কোনো গোলকধাঁধায় আটকে গেছি। বিশেষ করে কম্বিনেটরিক্স (Combinatorics) ও ডিফারেনশিয়াল ইকুয়েশনের ক্ষেত্রে। আজ আমি তোমাকে এমন একটি জাদুর কাঠির সাথে পরিচয় করিয়ে দেব যাকে বলা হয় **জেনারেটিং ফাংশন** (Generating Function), এবং এর সাথে যুক্ত একটি দারুণ বিষয় **লিজেন্ডার পলিনোমিয়াল** (Legendre Polynomials)। চলো, শুরু করা যাক!

জেনারেটিং ফাংশন: ম্যাজিক বাক্স

ধরো, তোমাকে একটি ধারার (sequence) অনেকগুলো সংখ্যা দেয়া হলো: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$। এদের নিয়ে কাজ করা অনেক সময় এলোমেলো মনে হতে পারে। জেনারেটিং ফাংশন মূলত এই ধারাটিকে একটি পলিনোমিয়াল বা পাওয়ার সিরিজের সহগ (coefficient) হিসেবে সাজিয়ে একটি মাত্র ফাংশনের ভেতর বন্দি করে ফেলে!

Definition: Generating Function

একটি ধারা $a_0, a_1, a_2, \ldots$ এর জন্য অর্ডিনারি জেনারেটিং ফাংশন $G(x)$ হলো:

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

এখানে x এর কোনো সুনির্দিষ্ট মান নেই। x হলো কেবল একটি "প্লেসহোল্ডার" (placeholder) যা আমাদের বলে দিচ্ছে কোন সহগটি ধারার কততম পদ।

তুমি হয়তো ভাবছ, "ভাইয়া, এটা করে কী লাভ?" একটি উদাহরণ দিলে পরিষ্কার হবে।

জেলিবিয়ান ও কয়েনের হিসাব

ধরা যাক, তুমি একটি দোকান থেকে জেলিবিয়ান কিনতে চাও। লাল, নীল এবং সবুজ জেলিবিয়ান আছে। শর্ত হলো, তোমাকে ঠিক ২টা লাল জেলিবিয়ান নিতে হবে, জোড় সংখ্যক নীল নিতে হবে এবং সবুজ জেলিবিয়ান ৩টার বেশি নেয়া যাবে না। তুমি মোট N টি জেলিবিয়ান কতভাবে নিতে পারবে?

এই সমস্যাটিকে প্রিন্সিপাল অফ ইনক্লুশন-এক্সক্লুশন (PIE) দিয়ে করতে গেলে জীবন তেজপাতা হয়ে যাবে। কিন্তু জেনারেটিং ফাংশন দিয়ে এটি খুব সহজ:

- লাল রঙের জন্য: শুধু ২টা নেয়া যাবে। এর পলিনোমিয়াল: x^2
- নীল রঙের জন্য: জোড় সংখ্যক $(0, 2, 4, \ldots)$। পলিনোমিয়াল: $1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$
- সবুজ রঙের জন্য: ৩টার বেশি নয় $(0, 1, 2, 3)$। পলিনোমিয়াল: $1 + x + x^2 + x^3$

এদের গুণ করলেই তুমি তোমার জেনারেটিং ফাংশন পেয়ে যাবে!

$$G(x) = x^2 \cdot \left(\frac{1}{1-x^2}\right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3)$$

এই $G(x)$ কে বিস্তার (expand) করলে x^N এর যে সহগ পাবে, সেটিই হলো N টি জেলিবিয়ান বাছাই করার উপায়!

একইভাবে, তুমি ক্যাশিয়ার ভাইয়ার কাছে খুচরা করার ম্যাথও করতে পারো (যেমন ১ টাকার, ২ টাকার ও ৫ টাকার কয়েন দিয়ে কীভাবে ১০০ টাকা বানাবে)। এর জেনারেটিং ফাংশন হলো:

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5}$$

ডেরিভেটিভ ও সিরিজের কৌশল

আমাদের সুপরিচিত একটি সিরিজ হলো:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

যদি তুমি দুই পাশে ডেরিভেটিভ (derivative) করো, তবে পাবে:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

এভাবে ক্যালকুলাস ব্যবহার করে আমরা নতুন নতুন ধারার জেনারেটিং ফাংশন তৈরি করতে পারি।

3b1b এর বিখ্যাত প্রবলেম: সাবসেট এবং রুটস অফ ইউনিটি

বিখ্যাত ইউটিউব চ্যানেল 3Blue1Brown (3b1b) এর একটি অসাধারণ কম্বিনেটরিক্স সমস্যা দেখো। ধরো, তোমার কাছে একটি সেট আছে $\{1, 2, \dots, 2000\}$। এর কতগুলো সাবসেটের উপাদানগুলোর যোগফল ঠিক 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে?

তোমাকে যদি নরমাল নিয়মে (Brute-force) করতে বলা হয়, তাহলে 2^{2000} টি সাবসেট চেক করতে হবে, যা অসম্ভব! প্রথমে মনে হতে পারে, যেহেতু ৫ টি সংখ্যার মধ্যে একটি ৫ দিয়ে বিভাজ্য, তাই মোট সাবসেটের $\frac{1}{5}$ অংশ হবে উত্তর। কিন্তু জেনারেটিং ফাংশন এবং কমপ্লেক্স নাম্বার দিয়ে আমরা এর নিখুঁত মান পাবো। সমীকরণটি হলো:

$$f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \cdots (1 + x^{2000})$$

তুমি যদি একে গুণ করে বিস্তার করো, তবে x^n এর সহগ হবে ঠিক সেই সাবসেটগুলোর সংখ্যা যাদের যোগফল n।

এখন 5 দ্বারা বিভাজ্য পদগুলো বের করতে আমরা ফিল্টার হিসেবে Roots of Unity (এককের মূল) ব্যবহার করব। এককের ৫-তম মূলটি হলো $\zeta = e^{2\pi i/5}$। আমরা যদি ফাংশনটিতে $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3$ এবং ζ^4 বসিয়ে তাদের গড় নিই, তবে ইন্টারফারেন্সের (Cancellation) কারণে শুধুমাত্র 5 এর গুণিতক পদগুলোই অবশিষ্ট থাকবে!

হিসাব করলে দেখা যায়:

- $x = 1$ বসালে: $f(1) = 2^{2000}$ (এটি হলো সেটের মোট সাবসেট)।
- $x = -1$ বসালে: $f(-1) = 0$ (এটি বোঝায় জোড় এবং বিজোড় যোগফলের সাবসেট সমান অংশে বিভক্ত)।
- $x = \zeta$ বসালে: $f(\zeta) = \prod_{k=1}^{2000}(1+\zeta^k)$ যেহেতু $\zeta^5 = 1$, পদগুলো সাইকেল বা লুপে ঘুরতে থাকে। প্রতিটি ৫ পদের একটি সাইকেলের মান হিসাব করলে আসে $(1+\zeta)(1+\zeta^2)(1+\zeta^3)(1+\zeta^4)(1+1) = 2$। এমন ৪০০ টি সাইকেলের গুণফল হলো 2^{400}। একইভাবে $f(\zeta^2) = f(\zeta^3) = f(\zeta^4) = 2^{400}$।

তাহলে 5 দ্বারা বিভাজ্য সাবসেটের মোট নিখুঁত সংখ্যা হবে এদের সবার গড়:

$$\text{মোট উপায়} = \frac{1}{5}\left(2^{2000} + 4 \cdot 2^{400}\right)$$

এটি একটি অসাধারণ উদাহরণ যে কীভাবে ফুরিয়ার ট্রান্সফর্মের (Fourier Transform) মূল ভিত্তি এবং কমপ্লেক্স অ্যানালাইসিস ব্যবহার করে আমরা ডিসক্রিট ম্যাথের এমন জটিল সমস্যা হাসতে হাসতে সমাধান করে ফেলতে পারি!

লিজেন্ডার পলিনোমিয়াল: নতুন এক ধারার জগত

এবার আমরা এমন এক ধরণের পলিনোমিয়ালের সাথে পরিচিত হবো যা ফিজিক্স আর ম্যাথের অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ একটি বিষয় – Legendre Polynomials বা লিজেন্ডার পলিনোমিয়াল।

সাধারণত আমরা $1, x, x^2, x^3, \ldots$ ব্যবহার করে ফাংশন তৈরি করি। কিন্তু এই x^n গুলো $[-1, 1]$ ব্যবধিতে অর্থোগোনাল (orthogonal) নয়। অর্থাৎ, এদের গুণ করে ইন্টিগ্রেশন করলে মান শূন্য হয় না।

গ্রাম-স্মিট (Gram-Schmidt) প্রসেস ব্যবহার করে আমরা স্পেসের নতুন কিছু পলিনোমিয়াল তৈরি করতে পারি যেগুলো একে অপরের সাথে লম্ব বা অর্থোগোনাল। আর এগুলোই হলো লিজেন্ডার পলিনোমিয়াল, $P_n(x)$!

Definition and Orthogonality

লিজেন্ডার পলিনোমিয়াল $P_n(x)$ হলো এমন একটি পলিনোমিয়াল ধারা যা $[-1, 1]$ ব্যবধিতে অর্থোগোনাল। অর্থাৎ:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{if } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{if } m = n \end{cases}$$

এখানে $P_n(x)$ এর সর্বোচ্চ ঘাত বা ডিগ্রি হলো n। শর্ত হচ্ছে, $x = 1$ বিন্দুতে সবসময় $P_n(1) = 1$ হবে।

রড্রিগেস ফর্মুলা (Rodrigues' Formula)

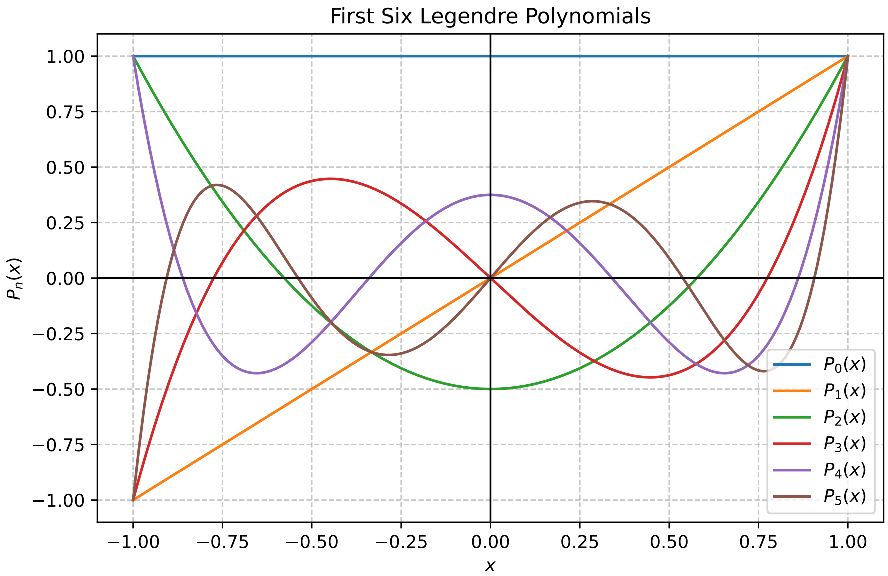
এই পলিনোমিয়ালগুলো বের করার সবচেয়ে সহজ উপায় হলো রড্রিগেস ফর্মুলা। এটি দেখতে কিছুটা ভয়ানক লাগলেও কাজ করে দারুণ!

Rodrigues' Formula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

চলো, প্রথম কয়েকটি লিজেন্ডার পলিনোমিয়াল বের করি:

- $n = 0$: $P_0(x) = \frac{1}{2^0 \cdot 0!}\frac{d^0}{dx^0}[1] = 1$
- $n = 1$: $P_1(x) = \frac{1}{2^1 \cdot 1!}\frac{d}{dx}[x^2 - 1] = \frac{1}{2}(2x) = x$
- $n = 2$: $P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2] = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}[x^4 - 2x^2 + 1] = \frac{1}{8}(12x^2 - 4) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
- $n = 3$: $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$



চিত্র ১: প্রথম কয়েকটি লিজেন্ডার পলিনোমিয়ালের গ্রাফ।

প্যারিটি প্রপার্টিজ (Parity Properties)

লিজেন্ডার পলিনোমিয়ালগুলো গভীরভাবে খেয়াল করলে অসাধারণ একটি জিনিস দেখতে পাবে।

- যখন n জোড় (even), তখন $P_n(x)$ একটি ইভেন ফাংশন। অর্থাৎ, $P_n(-x) = P_n(x)$। (যেমন $P_0(x) = 1, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$)
- যখন n বিজোড় (odd), তখন $P_n(x)$ একটি অড ফাংশন। অর্থাৎ, $P_n(-x) = -P_n(x)$। (যেমন $P_1(x) = x, P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$)

লিজেন্ডার ডিফারেনশিয়াল ইকুয়েশন

ফিজিক্সে (যেমন কোয়ান্টাম মেকানিক্স বা ইলেকট্রোম্যাগনেটিজম-এ) স্পেরিক্যাল পোলার কোঅর্ডিনেট সিস্টেমে ক্যালকুলেশন করতে গেলে খুব পরিচিত একটি সমীকরণ দেখা যায়:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

এই সমীকরণের সমাধানই হলো আমাদের লিজেন্ডার পলিনোমিয়াল $y = P_n(x)$!

Bonnet's Recursion Formula (বোনেটের রিকারশন ঘাপলা!)

প্রতিবার ডেরিভেটিভ করে $P_n(x)$ বের করা বেশ ঝামেলার। তাই কম্পিউটেশন সহজ করতে একটি দারুণ রিকারশন বা পুনরাবৃত্তি সূত্র আছে:

Bonnet's Recursion Formula

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

তুমি $P_0(x) = 1$ এবং $P_1(x) = x$ জানলেই এই সূত্র দিয়ে বাকি সবগুলো পলিনোমিয়াল বের করে ফেলতে পারবে। নিজে ট্রাই করে দেখতে পারো!

লিজেন্ডার পলিনোমিয়ালের জেনারেটিং ফাংশন: বৃত্তের অবসান

বলো তো, আমরা শুরুতে জেনারেটিং ফাংশন নিয়ে কেন আলোচনা করেছিলাম? হ্যাঁ, তুমি ঠিক ধরেছো! লিজেন্ডার পলিনোমিয়ালগুলোরও একটি অসাধারণ জেনারেটিং ফাংশন আছে।

যদি আমরা একটি পাওয়ার সিরিজ তৈরি করি যেখানে t^n এর সহগ হবে $P_n(x)$, তবে আমরা পাই:

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

এটি পদার্থবিজ্ঞানে পটেনশিয়াল বা বিভব হিসাব করার সময় ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়। যেমন একটি আধানের জন্য স্পেসের কোনো বিন্দুতে বিভবের মান বের করতে এই জেনারেটিং ফাংশন জাদুর মতো কাজ করে!

সার্কেল কোঅর্ডিনেট জিওমেট্রি: সমস্যা ও সমাধান

যেহেতু আমরা অনেক থিওরি দেখলাম, চলো এবার কিছু বৃত্তীয় স্থানাঙ্ক জ্যামিতির (Circle Coordinate Geometry) সমস্যা দেখি যেগুলো বিভিন্ন অলিম্পিয়াড (যেমন AoPS) থেকে নেয়া। এর মাধ্যমে আমাদের গাণিতিক যুক্তির চর্চা হবে।

Problem 1 (AoPS)

একটি বৃত্তের সমীকরণ হলো $x^2+y^2-6x+8y=0$। এর কেন্দ্র (center) এবং ব্যাসার্ধ (radius) নির্ণয় করো।

সমাধান:

প্রথমে সমীকরণটিকে সাজাই:

$$(x^2-6x)+(y^2+8y)=0$$

এখন পূর্ণবর্গ (perfect square) বানানোর জন্য যোগ করি:

$$(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=9+16$$
$$(x-3)^2+(y+4)^2=25$$

এটি একটি আদর্শ বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ এর সাথে মিলে যায়।
অতএব, কেন্দ্রটি হলো $(h,k)=(3,-4)$ এবং ব্যাসার্ধ $r=\sqrt{25}=5$।

Problem 2 (AoPS)

দুটি বৃত্ত $C_1 : x^2+y^2=25$ এবং $C_2 : x^2+y^2-14x-6y+33=0$। প্রমাণ করো যে, এরা একে অপরকে স্পর্শ করে।

সমাধান:

প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র $O_1(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1=5$।
দ্বিতীয় বৃত্তটিকে সাজাই:

$$(x^2-14x+49)+(y^2-6y+9)=-33+49+9$$
$$(x-7)^2+(y-3)^2=25$$

দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $O_2(7,3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = 5$।
কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব:

$$d = \sqrt{(7-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58} \approx 7.61$$

কিন্তু $r_1 + r_2 = 10 \neq \sqrt{58}$ এবং $|r_1 - r_2| = 0$। এখানে মনে হচ্ছে বৃত্তদ্বয় স্পর্শ করে না, বরং একে অপরকে ছেদ করে। (AoPS এর এই ম্যাথটিতে সাধারণত ব্যাসার্ধের যোগফল বা বিয়োগফল দূরত্বের সমান কিনা তা চেক করা হয়। চলো সঠিক শর্তটি মনে রাখি: স্পর্শ করলে $d = r_1 + r_2$ বা $d = |r_1 - r_2|$ হবে)।

Problem 3 (Power of a Point)

একটি বিন্দু $P(8,6)$ থেকে $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের (tangent) দৈর্ঘ্য কত?

সমাধান:
পাওয়ার অফ এ পয়েন্টের কনসেপ্ট থেকে আমরা জানি, স্পর্শকের দৈর্ঘ্য l হলে, $l = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - r^2}$ (যখন সমীকরণ $x^2 + y^2 - r^2 = 0$)।

$$l = \sqrt{8^2 + 6^2 - 25}$$
$$l = \sqrt{64 + 36 - 25} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

অতএব, স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $5\sqrt{3}$ একক।

Problem 4 (Orthogonal Circles)

প্রমাণ করো যে $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ বৃত্ত দুটি পরস্পর অর্থোগোনালভাবে (লম্বভাবে) ছেদ করে।

সমাধান:
দুটি বৃত্ত $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ অর্থোগোনালভাবে ছেদ করার শর্ত হলো: $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$।
প্রথম বৃত্তের জন্য: $g_1 = -1, f_1 = 2, c_1 = -4$
দ্বিতীয় বৃত্তের জন্য: $g_2 = 3, f_2 = 4, c_2 = 0$
শর্ত যাচাই করি:
বামপক্ষ = $2(-1)(3) + 2(2)(4) = -6 + 16 = 10$
ডানপক্ষ = $-4 + 0 = -4$
এখানে $10 \neq -4$, কাজেই বৃত্তদ্বয় অর্থোগোনাল নয়। মনে রেখো, মাঝে মাঝে প্রশ্নে দেওয়া শর্ত সত্য নাও হতে পারে! তোমাদের কাজ হলো কেবল অন্ধের মতো প্রমাণ না করে শর্তগুলো ঠিকমত মিলিয়ে দেখা।

Problem 5 (Common Chord)

দুটি বৃত্ত $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 8y + 4 = 0$ এর সাধারণ জ্যা (common chord) এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান:
সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ বের করা খুব সহজ! এটি হলো $S_1 - S_2 = 0$।

$$(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4) - (x^2 + y^2 - 2x - 8y + 4) = 0$$
$$-2x + 2y = 0 \implies y = x$$

এবার দৈর্ঘ্য বের করার জন্য প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বের করি।
কেন্দ্র $C(2,3)$, ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{2^2 + 3^2 - 4} = \sqrt{4 + 9 - 4} = 3$।
কেন্দ্র $C(2,3)$ থেকে $x - y = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব d:

$$d = \frac{|2-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য = $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{17}{2}} = \sqrt{34} \approx 5.83$।