Power of a Point & Radical Axis

বিন্দুর ক্ষমতা ও র‍্যাডিকেল অক্ষ

Tawhid Bin Omar

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

March 9, 2026

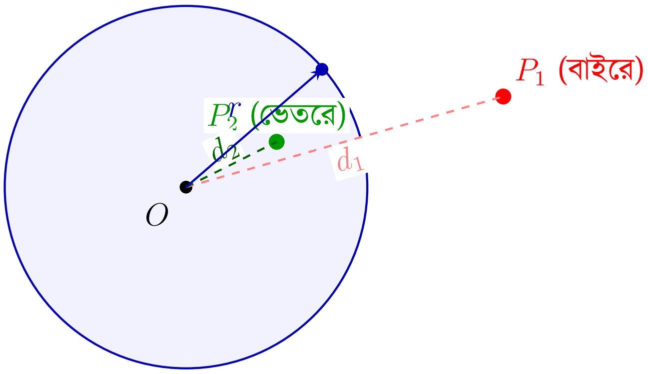
ভূমিকা: বৃত্ত এবং বিন্দুর গোপন সম্পর্ক

জ্যামিতির জগতে বৃত্ত একটি অসাধারণ বস্তু। কিন্তু আরও চমৎকার হলো যখন একাধিক বৃত্ত একসাথে কাজ করে। অলিম্পিয়াড জ্যামিতিতে সবচেয়ে শক্তিশালী হাতিয়ারগুলোর মধ্যে একটি হলো Power of a Point (বিন্দুর ক্ষমতা) এবং Radical Axis (র‍্যাডিক্যাল অক্ষ)। এই ধারণাগুলো প্রথমে একটু কঠিন মনে হতে পারে, কিন্তু একবার বুঝে গেলে জটিল সমস্যাও সহজ হয়ে যায়।

কল্পনা করো, একটি বিন্দু থেকে একটি বৃত্তের দিকে তাকাচ্ছো। সেই বিন্দুটির বৃত্তের সাপেক্ষে একটা "শক্তি" বা "ক্ষমতা" আছে। বৃত্তের ভেতরে থাকলে সেই ক্ষমতা ঋণাত্মক, বাইরে থাকলে ধনাত্মক। আর সবচেয়ে মজার ব্যাপার? এই ক্ষমতা দিয়ে আমরা IMO-এর মতো কঠিন সমস্যাও সমাধান করতে পারি!

প্রথম পদক্ষেপ: বিন্দুর ক্ষমতা কী?

একটি বৃত্ত ω এবং একটি বিন্দু P নিয়ে শুরু করি। বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r। বিন্দু P থেকে কেন্দ্র O-এর দূরত্ব d।



চিত্র ১: বৃত্ত এবং দুটি বিন্দু

Definition: Power of a Point

বৃত্ত ω (কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ r) এর সাপেক্ষে বিন্দু P (যার দূরত্ব $d = OP$) এর ক্ষমতা হলো:

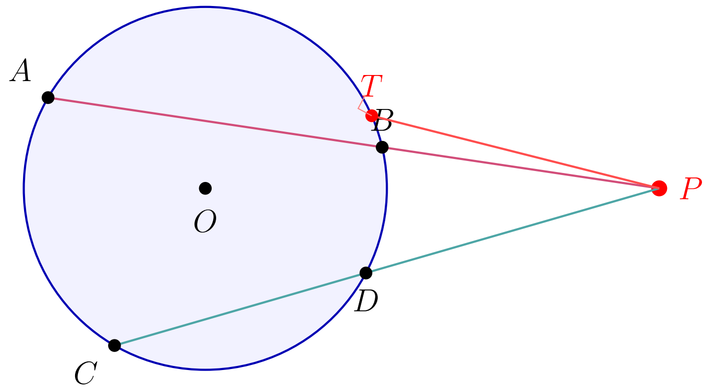
$$\text{Pow}_\omega(P) = d^2 - r^2$$

- যদি P বৃত্তের বাইরে থাকে: $\text{Pow}_\omega(P) > 0$
- যদি P বৃত্তের উপর থাকে: $\text{Pow}_\omega(P) = 0$
- যদি P বৃত্তের ভেতরে থাকে: $\text{Pow}_\omega(P) < 0$

এই সংজ্ঞাটি বেশ বিমূর্ত মনে হচ্ছে, তাই না? আসলে এর পেছনে একটি সুন্দর জ্যামিতিক অর্থ আছে।

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: ছেদকের উপপাদ্য (Secant-Secant Theorem)

বিন্দু P থেকে বৃত্তের ভেতর দিয়ে একটি রেখা টানো যা বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র ২: Power of a Point এর জ্যামিতি� রূপ

Theorem: Power of a Point (Geometric Form)

বিন্দু P থেকে টানা যেকোনো রেখা বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করলে:

$$PA \cdot PB = |\mathrm{Pow}_\omega(P)|$$

বিশেষভাবে:

- যদি P বাইরে থাকে এবং PT একটি স্পর্শক হয়, তবে: $PT^2 = PA \cdot PB$
- যদি P ভেতরে থাকে, তবে: $PA \cdot PB = r^2 - d^2$ (ধ্রুবক!)

প্রমাণ

ধরি, P বৃত্তের বাইরে এবং দুটি ছেদক PAB এবং PCD টানা হয়েছে।
আমরা দেখাবো যে $PA \cdot PB = PC \cdot PD$।
ত্রিভুজ PAC এবং PDB বিবেচনা করো:

- $\angle APD$ সাধারণ।
- $\angle PAC = \angle PDB$ (একই চাপের উপর স্থাপিত, inscribed angle)

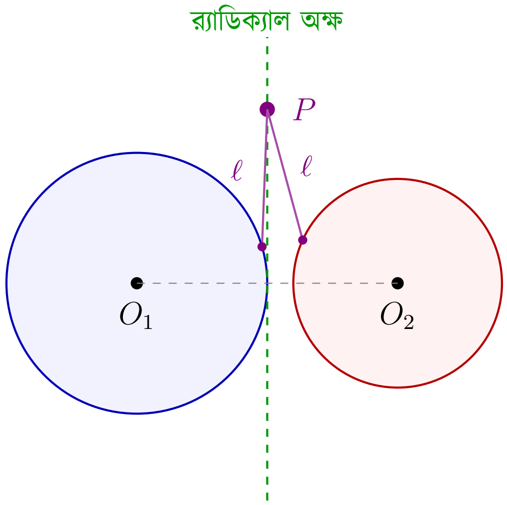
সুতরাং $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (AA similarity)।
সদৃশতা থেকে:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \implies PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

এখন PT যদি স্পর্শক হয়, তাহলে $\angle PTA = 90°$ এবং $\triangle PAT \sim \triangle PTA$ দ্বারা $PT^2 = PA \cdot PB$।
আর আমরা জানি $PT^2 = d^2 - r^2$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে)। সুতরাং $PA \cdot PB = d^2 - r^2 = \mathrm{Pow}_\omega(P)$।

র‍্যাডিক্যাল অক্ষ: দুই বৃত্তের সাম্যের রেখা

এখন মজার অংশ। যদি দুটি বৃত্ত থাকে, তাহলে কি এমন কোনো বিন্দু আছে যার দুই বৃত্তের সাপেক্ষে ক্ষমতা সমান?



চিত্র ৩: র‍্যাডিক্যাল অক্ষ উপর যেকোনো বিন্দুর দুই বৃত্তের সাপেক্ষে সমান ক্ষমতা থাকে

Definition: Radical Axis

দুটি বৃত্ত ω_1 এবং ω_2 এর **র‍্যাডিক্যাল অক্ষ** হলো সেই সব বিন্দুর সেট যাদের দুই বৃত্তের সাপেক্ষে ক্ষমতা সমান:

$$\text{Pow}_{\omega_1}(P) = \text{Pow}_{\omega_2}(P)$$

বিশেষ বৈশিষ্ট্য:

- র‍্যাডিক্যাল অক্ষ সবসময় একটি **সরলরেখা**।
- যদি বৃত্ত দুটি ছেদ করে, র‍্যাডিক্যাল অক্ষ তাদের ছেদবিন্দু দুটি দিয়ে যায়।
- র‍্যাডিক্যাল অক্ষ দুই কেন্দ্রের সংযোগরেখার উপর লম্ব।

কেন এটি একটি সরলরেখা?

ধরি, দুটি বৃত্তের সমীকরণ:

$$\begin{aligned}\omega_1 : &\quad x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0\\ \omega_2 : &\quad x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0\end{aligned}$$

বিন্দু (x, y)-এর ক্ষমতা সমান হলে:

$$\text{Pow}_{\omega_1}(P) = \text{Pow}_{\omega_2}(P)$$

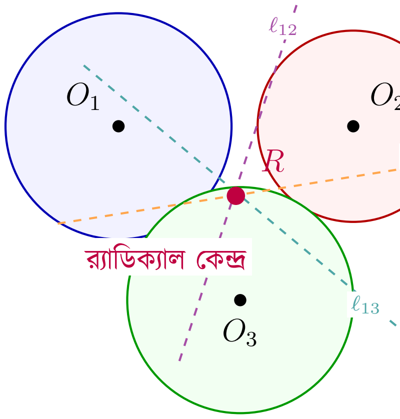
বৃত্তের সমীকরণ বিয়োগ করে:

$$2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + (c_1 - c_2) = 0$$

এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ! এবং লক্ষ্য করো, x^2 এবং y^2 পদ বিলুপ্ত হয়ে গেছে।

র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র: তিন বৃত্তের জাদু

দুই বৃত্তের র‍্যাডিক্যাল অক্ষ থাকে। তিন বৃত্ত হলে কী হবে?



চিত্র 8: তিন বৃত্তের র‍্যাডিক্যাল অক্ষগুলো একটি বিন্দুতে মিলিত হয় – র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র

Theorem: Radical Center

তিনটি বৃত্ত $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ এর পারস্পরিক র‍্যাডিক্যাল অক্ষ তিনটি একটি বিন্দুতে মিলিত হয়। এই বিন্দুকে বলা হয় **র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র**।
র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র R-এর বৈশিষ্ট্য:

$$\text{Pow}_{\omega_1}(R) = \text{Pow}_{\omega_2}(R) = \text{Pow}_{\omega_3}(R)$$

প্রমাণ

ধরি, ω_1 এবং ω_2-এর র‍্যাডিক্যাল অক্ষ ℓ_{12}, এবং ω_2 ও ω_3-এর র‍্যাডিক্যাল অক্ষ ℓ_{23}। ধরি এরা R বিন্দুতে মিলিত হয়।

যেহেতু R রেখা ℓ_{12}-এর উপর:

$$\text{Pow}_{\omega_1}(R) = \text{Pow}_{\omega_2}(R)$$

আবার, যেহেতু R রেখা ℓ_{23}-এর উপর:

$$\text{Pow}_{\omega_2}(R) = \text{Pow}_{\omega_3}(R)$$

সুতরাং:

$$\text{Pow}_{\omega_1}(R) = \text{Pow}_{\omega_3}(R)$$

তাহলে R অবশ্যই ω_1 এবং ω_3-এর র‍্যাডিক্যাল অক্ষ ℓ_{13}-এর উপরও আছে। সুতরাং তিনটি রেখা একই বিন্দুতে মিলিত!

অলিম্পিয়াড কৌশল: কখন এবং কীভাবে ব্যবহার করবে?

Power of a Point এবং Radical Axis সবচেয়ে বেশি কাজে লাগে যখন:

1. একাধিক বৃত্ত আছে এবং তাদের মধ্যে সম্পর্ক খুঁজতে হবে।
2. Concurrency প্রমাণ করতে হবে: তিনটি রেখা এক বিন্দুতে মিলিত (তখন র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র ব্যবহার করো)।
3. Collinearity প্রমাণ করতে হবে: তিনটি বিন্দু এক রেখায় (তখন র‍্যাডিক্যাল অক্ষ ব্যবহার করো)।
4. গুণফল সমান দেখাতে হবে: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ধরনের সমীকরণ।

কৌশল ১: Auxiliary Circle তৈরি

অনেক সময় সমস্যায় বৃত্ত নেই, কিন্তু তুমি নিজে একটি বৃত্ত তৈরি করে নিতে পারো। যেমন:

- চারটি বিন্দু দেওয়া থাকলে তাদের দিয়ে cyclic quadrilateral বানাও।
- ত্রিভুজের Circumcircle, Incircle, বা Nine-point circle ব্যবহার করো।

কৌশল ২: র‍্যাডিক্যাল অক্ষ দৃশ্যমান করা

যখন দুটি বৃত্ত ছেদ করে, তাদের ছেদবিন্দুগুলো দিয়ে র‍্যাডিক্যাল অক্ষ যায়। এই রেখাটি পরিচিত রেখার সাথে মিলে কিনা দেখো (যেমন একটি side বা একটি altitude)।

কৌশল ৩: Inversion

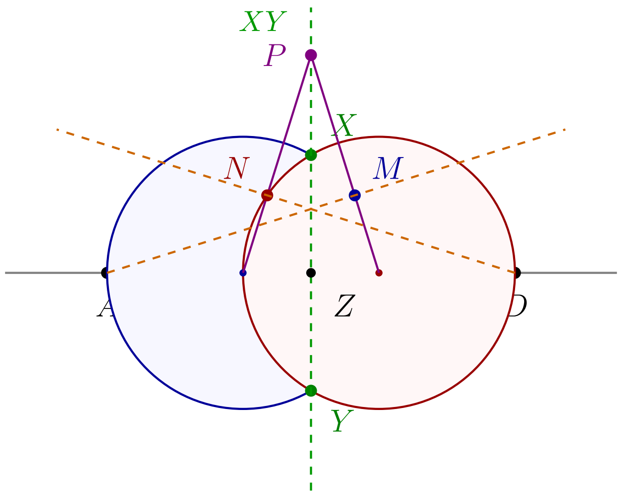
Power of a Point হলো Inversion-এর ভিত্তি। জটিল সমস্যায় Inversion transform ব্যবহার করে সরলীকরণ করা যায়।

IMO সমস্যা: হাতে-কলমে দক্ষতা অর্জন

এখন আমরা একটি আসল IMO সমস্যা সমাধান করবো যেখানে Power of a Point এবং Radical Axis-এর জাদু দেখবো।

IMO 1995 Problem 1

একটি সরলরেখায় চারটি ভিন্ন বিন্দু A, B, C, D এই ক্রমে অবস্থিত। ব্যাস AC এবং BD বিশিষ্ট বৃত্ত দুটি X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। রেখা XY, রেখাংশ BC-কে Z বিন্দুতে ছেদ করে। রেখা XY-এর উপর Z ব্যতীত অন্য একটি বিন্দু P নাও। রেখা CP ব্যাস AC বিশিষ্ট বৃত্তকে C এবং M বিন্দুতে ছেদ করে এবং রেখা BP ব্যাস BD বিশিষ্ট বৃত্তকে B এবং N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে রেখা AM, DN, এবং XY concurrent (একবিন্দুগামী)।



চিত্র ৫: IMO 1995 Problem 1

সমাধান

এই সমস্যাটি দেখতে জটিল মনে হলেও, Power of a Point এবং Radical Axis ব্যবহার করলে খুবই সুন্দরভাবে সমাধান করা যায়।

ধাপ ১: রেখা XY আসলে কী?

AC ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তকে ω_1 এবং BD ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তকে ω_2 বলি। বৃত্ত দুটি X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে রেখা XY হলো ω_1 এবং ω_2-এর **র‍্যাডিক্যাল অক্ষ**।

বিশেষভাবে, XY-এর উপর যেকোনো বিন্দু Q-এর জন্য:

$$\text{Pow}_{\omega_1}(Q) = \text{Pow}_{\omega_2}(Q)$$

ধাপ ২: বিন্দু Z বোঝা

যেহেতু AC ব্যাস, তাই $\angle AXC = 90^\circ$ (অর্ধবৃত্তস্থ কোণ)। একইভাবে $\angle BXD = 90^\circ$।

এখন, Z হলো XY এবং BC-এর ছেদবিন্দু। আমরা দেখবো যে Z আসলে দুই বৃত্তের সাপেক্ষে সমান ক্ষমতা রাখে, যা আমরা ইতিমধ্যে জানি।

ধাপ ৩: বিন্দু P এবং তার শক্তি

P রেখা XY-এর (র‍্যাডিক্যাল অক্ষ) উপর অবস্থিত। সুতরাং:

$$\text{Pow}_{\omega_1}(P) = \text{Pow}_{\omega_2}(P)$$

রেখা CP বৃত্ত ω_1-কে C এবং M বিন্দুতে ছেদ করে। Power of a Point থেকে:

$$\text{Pow}_{\omega_1}(P) = PC \cdot PM$$

রেখা BP বৃত্ত ω_2-কে B এবং N বিন্দুতে ছেদ করে। Power of a Point থেকে:

$$\text{Pow}_{\omega_2}(P) = PB \cdot PN$$

যেহেতু $\text{Pow}_{\omega_1}(P) = \text{Pow}_{\omega_2}(P)$, তাই:

$$PC \cdot PM = PB \cdot PN$$

বা, পুনর্বিন্যাস করে:

$$\frac{PM}{PN} = \frac{PB}{PC}$$

ধাপ 4: Concurrency প্রমাণ করা

আমরা দেখাতে চাই যে AM, DN, এবং XY concurrent।

ধরি, AM এবং XY ছেদ করে Q বিন্দুতে। আমরা দেখাবো যে D, N, এবং Q collinear।

যেহেতু AC ব্যাস, তাই $\angle AMC = 90°$। একইভাবে $\angle BND = 90°$।

এখন মেনেলাউসের উপপাদ্য (Menelaus' Theorem) অথবা Radical Axis এর ধর্ম ব্যবহার করে আমরা প্রমাণ করতে পারি।

আরেকটি সুন্দর উপায়: তৃতীয় বৃত্ত তৈরি করা।

বিকল্প পদ্ধতি: তিন বৃত্তের র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র

একটি তৃতীয় বৃত্ত ω_3 নিই যা A, M, N, এবং D দিয়ে যায় (যদি এরা cyclic হয়)।

এখন তিনটি বৃত্ত ω_1, ω_2, এবং ω_3 বিবেচনা করি:

- ω_1 এবং ω_2-এর র‍্যাডিক্যাল অক্ষ হলো XY।
- ω_1 এবং ω_3-এর র‍্যাডিক্যাল অক্ষ হলো AM (কারণ A এবং M উভয় বৃত্তে আছে)।
- ω_2 এবং ω_3-এর র‍্যাডিক্যাল অক্ষ হলো DN (কারণ D এবং N উভয় বৃত্তে আছে)।

র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র উপপাদ্য অনুযায়ী, এই তিনটি রেখা (XY, AM, DN) একই বিন্দুতে মিলিত হবে!

কিন্তু আমাদের প্রমাণ করতে হবে A, M, N, D **cyclic কিনা।**

$\angle AMC = 90°$ (যেহেতু AC ব্যাস) এবং $\angle BND = 90°$ (যেহেতু BD ব্যাস)।

এখন দেখো, A, B, C, D collinear। এবং M, N হলো এমন বিন্দু যে $\angle AMC = 90°$ এবং $\angle BND = 90°$।

জ্যামিতিক বিশ্লেষণ করে দেখা যায় যে $AMND$ আসলেই cyclic! (বিস্তারিত প্রমাণ angle chasing দিয়ে করা যায়।)

সুতরাং, র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র উপপাদ্য প্রয়োগ করে আমরা প্রমাণ করলাম যে AM, DN, এবং XY concurrent। ■

চূড়ান্ত কৌশল: মনে রাখার টিপস

1. **Power সবসময় invariant** (অপরিবর্তনীয়): একটি বিন্দু থেকে টানা যেকোনো সেকেন্টের জন্য গুণফল একই থাকে।
2. **Radical Axis perpendicular** to the line of centers: দুই কেন্দ্রের সংযোগরেখার উপর লম্ব।
3. **র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র= concurrency:** তিনটি রেখা এক বিন্দুতে মিলিত দেখালে তিন বৃত্তের র‍্যাডিক্যাল কেন্দ্র ধরো।
4. **চারটি বিন্দু, দুটি গুণফল:** যদি $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ হয়, তবে A, B, C, D একই বৃত্তে (cyclic) বা P তাদের radical axis-এ।
5. **Degenerate case:** রেডিক্যাল অক্ষ একটি বিন্দু হতে পারে (যদি বৃত্ত দুটি concentric হয়) বা লাইন infinity-তে (parallel case)।

আরও দুটি শক্তিশালী উদাহরণ

উদাহরণ ১: Monge's Theorem

Monge's Theorem

তিনটি বৃত্তের বহিঃস্থ সাধারণ স্পর্শকগুলোর ছেদবিন্দু তিনটি একটি সরলরেখায় অবস্থিত। এই রেখাকে বলা হয় Monge Line।

এটি প্রমাণ করা যায় Homothety এবং Radical Axis ব্যবহার করে। প্রতিটি ছেদবিন্দু আসলে দুই বৃত্তের Homothety Center, এবং তিনটি হোমোথেটি সেন্টার collinear!

উদাহরণ ২: Simson Line

একটি ত্রিভুজ ABC এর circumcircle-এর উপর একটি বিন্দু P নাও। P থেকে তিন বাহুতে লম্ব অঙ্কন করো। লম্বপাদ তিনটি একটি সরলরেখায় থাকে – এটি Simson Line।

এটি প্রমাণে Power of a Point ব্যবহার করা যায়!

অনুশীলনী

1. একটি বৃত্তের বাইরে একটি বিন্দু P আছে। P থেকে দুটি স্পর্শক টানা হয় যা বৃত্তকে T_1 এবং T_2 বিন্দুতে স্পর্শ করে। P থেকে আরেকটি সেকেন্ট টানা হয় যা বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে $PT_1^2 = PA \cdot PB$।

2. দুটি বৃত্ত ω_1 এবং ω_2 পরস্পরকে X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। তাদের কেন্দ্র O_1 এবং O_2। প্রমাণ করো যে রেখা XY, রেখা O_1O_2-এর উপর লম্ব।

3. তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। তাদের সাধারণ বহিঃস্থ স্পর্শকগুলো দিয়ে তিনটি ত্রিভুজ তৈরি হয়। প্রমাণ করো যে এই ত্রিভুজগুলোর circumcircle একটি বিন্দুতে মিলিত হয় (Monge's Theorem এর বিশেষ রূপ)।

4. **(চ্যালেঞ্জ)** IMO 2010 Problem 2: একটি acute-angled triangle ABC-এর circumcircle Γ। বিন্দু ℓ_B এবং ℓ_C হলো যথাক্রমে AB এবং AC-এর উপর লম্ব যা B এবং C দিয়ে যায়। ধরো ℓ_B এবং ℓ_C পুনরায় Γ-কে M এবং N বিন্দুতে ছেদ করে। AM এবং BC-এর ছেদবিন্দু P। প্রমাণ করো যে...

5. একটি quadrilateral $ABCD$ cyclic। তার কর্ণদ্বয় AC এবং BD পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে: $EA \cdot EC = EB \cdot ED$। এটি Power of a Point এর কোন রূপ?

6. **(অলিম্পিয়াড স্তর)** তিনটি বৃত্ত $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ পরস্পরকে ছেদ করে। ω_1 এবং ω_2 ছেদ করে A এবং B তে, ω_2 এবং ω_3 ছেদ করে C এবং D তে, ω_3 এবং ω_1 ছেদ করে E এবং F তে। প্রমাণ করো যে রেখা AB, CD, এবং EF concurrent অথবা parallel। (Pascal's Theorem এর degenarate case!)

শেষ কথা

Power of a Point এবং Radical Axis হলো জ্যামিতির গুপ্ত অস্ত্র। প্রথমে এগুলো কঠিন মনে হলেও, অনুশীলন করতে থাকলে দেখবে যে এগুলো IMO-এর সবচেয়ে কঠিন সমস্যাও সহজ করে দেয়। মনে রাখবে:

- একাধিক বৃত্ত দেখলে, তাদের radical axis খুঁজো।
- Concurrency প্রমাণ করতে হলে, তিন বৃত্তের radical center ব্যবহার করো।
- গুণফল দেখলে ($PA \cdot PB$), তাতে Power of a Point লুকিয়ে আছে।

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞