Projective Geometry

TAWHID BIN OMAR

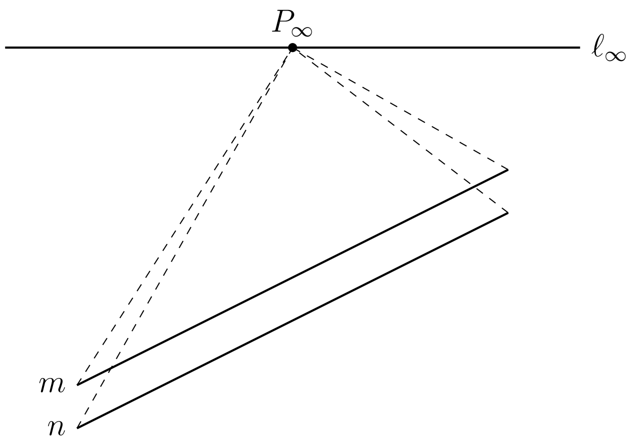
∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

February 27, 2026

প্রজেক্টিভ জ্যামিতি অলিম্পিয়াড সমস্যায় খুব কার্যকর। যে জায়গায় ইউক্লিডীয় পদ্ধতিতে বারবার বিশেষ কেস আলাদা করতে হয়, প্রজেক্টিভ দৃষ্টিতে সেখানে কাঠামো অনেক পরিষ্কার দেখা যায়। এই লেখায় আমরা মূল ধারণা, প্রধান invariant, এবং দরকারি কয়েকটি থিওরেম সহজভাবে গুছিয়ে দেখব।

ইউক্লিডীয় জ্যামিতিতে সমান্তরাল রেখা কখনও ছেদ করে না। এই একটি নিয়মের কারণে অনেক প্রমাণ দুই ভাগে ভাঙতে হয়। এক ভাগ ছেদকারী রেখার জন্য, আরেক ভাগ সমান্তরালের জন্য। প্রজেক্টিভ জ্যামিতি এই বিভাজন সরিয়ে দেয়। এখানে যেকোনো দুইটি ভিন্ন রেখা একবার ছেদ করে, আর ইউক্লিডীয় অর্থে সমান্তরাল রেখা অসীমের একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

তাই আমরা সমতলকে বিস্তৃত করি। প্রতিটি দিকের জন্য একটি করে অসীম বিন্দু ধরি। সব অসীম বিন্দু মিলে একটি নতুন রেখা তৈরি করে, যাকে line at infinity বলা হয়। তখন দুইটি নিয়ম পুরো বিষয়টি চালায়:



চিত্র ১: Euclidean-এ সমান্তরাল m, n রেখা projective-এ P_∞ বিন্দুতে মিলিত হয়।

Fundamental Axioms of Projective Geometry

- যেকোনো দুইটি ভিন্ন বিন্দু একটি একক রেখা নির্ধারণ করে।
- যেকোনো দুইটি ভিন্ন রেখা একটি একক বিন্দু নির্ধারণ করে।

বিন্দু আর রেখার এই সমতাকে duality বলা হয়। এই ধারণা ধরতে পারলে অনেক থিওরেম জোড়ায় জোড়ায় মনে রাখা সহজ হয়।

বীজগাণিতিক মডেল হিসেবে projective plane $\mathbb{P}^2$ ব্যবহার করি।

Definition: Homogeneous Coordinates

একটি বিন্দুর homogeneous coordinates হয়

$$[x : y : z],$$

যেখানে $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ এবং

$$[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$$

যেকোনো শূন্য নয় এমন স্কেলার λ-এর জন্য সত্য। ইউক্লিডীয় বিন্দু (x, y)-কে লিখি $[x : y : 1]$। $z = 0$ হলে সেটি অসীমের বিন্দু।

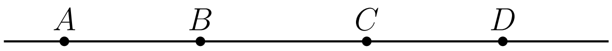
Homogeneous coordinates ব্যবহার করলে রেখার ছেদ বের করার পদ্ধতি সব ক্ষেত্রে একরকম থাকে। দুইটি রেখার সমীকরণ সমাধান করলেই একটি বিন্দু পাওয়া যায়। রেখা ইউক্লিডীয় অর্থে সমান্তরাল হলেও উত্তর আসে, আর সেই বিন্দু $z = 0$-এ পড়ে।

অলিম্পিয়াডের দৃষ্টিতে প্রধান প্রশ্ন হলো projection কী রক্ষা করে। কোণ রক্ষা পায় না। দূরত্ব রক্ষা পায় না। বেশিরভাগ অনুপাতও রক্ষা পায় না। কিন্তু একটি খুব গুরুত্বপূর্ণ পরিমাণ স্থির থাকে, সেটি cross ratio।

Definition: Cross Ratio

একই সরলরেখায় চারটি ভিন্ন বিন্দু A, B, C, D হলে cross ratio লেখা যায়:

$$\mathrm{CR}(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}.$$



চিত্র ২: একই সরলরেখায় A, B, C, D বিন্দু নিয়ে cross ratio নির্ধারিত হয়।

Projection পৃথক দৈর্ঘ্য বদলে দেয়, কিন্তু cross ratio অপরিবর্তিত থাকে। এই invariant-ই প্রজেক্টিভ সমস্যায় নির্ভর করার মতো সবচেয়ে শক্ত হাতিয়ারগুলোর একটি।

Harmonic division-এর সমস্যায় এই ভাষা খুব কাজে লাগে। যদি

$$\mathrm{CR}(A, B, C, D) = -1,$$

তবে (C, D) হলো (A, B)-এর সাপেক্ষে harmonic pair। Complete quadrilateral, conic-এর pole-polar, এবং concurrency সমস্যায় এটি বারবার দেখা যায়।

Ceva একটি মৌলিক থিওরেম। ত্রিভুজ ABC-এ D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB-এ থাকলে AD, BE, CF সমবিন্দু হবে তখনই যখন

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Menelaus একই ধরনের collinearity শর্ত দেয়। প্রজেক্টিভ ভাষায় Ceva আর Menelaus একে অপরের dual বিবৃতি। তাই আলাদা সূত্র হিসেবে নয়, জোড়া হিসেবে শেখা বেশি ফলদায়ক।

Pappus থিওরেম আরেকটি শক্তিশালী কাঠামো দেখায়। এক রেখায় A, B, C এবং অন্য রেখায় A', B', C' নিলে

$$AB' \cap A'B, \quad AC' \cap A'C, \quad BC' \cap B'C$$

এই তিনটি বিন্দু সমরেখ হয়। এখানে কোণ বা দূরত্বের দরকার নেই। পুরো বক্তব্য incidence-ভিত্তিক।

Pascal থিওরেম conic-এর ক্ষেত্রে একই ধারা বাড়ায়। একটি conic-এ ছয়টি বিন্দু নিলে বিপরীত বাহুগুলোর তিনটি ছেদবিন্দু সমরেখ হয়। সব nondegenerate conic প্রজেক্টিভভাবে সমতুল্য। তাই জটিল conic-কে সহজ মডেলে পাঠিয়ে সমাধান করে ফল আবার ফিরিয়ে আনা যায়।

আরেকটি কার্যকর কৌশল হলো অসুবিধাজনক বিন্দুকে অসীমে পাঠানো। চিত্রে সমান্তরাল রেখা বেশি থাকলে এমন projective map নাও যাতে সেই দিকটি সসীম বিন্দুতে আসে। তখন সমস্যা parallelism থেকে concurrency-তে রূপ নেয়, আর বিশ্লেষণ অনেক সহজ হয়।

পুরো নমনীয়তার মূল কথা সহজ। Projective map incidence ও cross ratio রক্ষা করে, কিন্তু কোণ ও দৈর্ঘ্য রক্ষা করে না। তাই প্রশ্নে যদি শুধু কোন বিন্দু কোথায় আছে এবং কোন রেখা কোথায় ছেদ করে এই তথ্য লাগে, তাহলে প্রজেক্টিভ পদ্ধতি নাও।

একটি ধাপভিত্তিক ছবি মনে রাখো। Euclidean জ্যামিতি দৈর্ঘ্য ও কোণ ধরে। Affine জ্যামিতি কোণ বাদ দিয়ে parallelism ও line ratio রাখে। Projective জ্যামিতি parallelism বাদ দিয়ে incidence ও cross ratio রাখে। ধাপে ধাপে মেট্রিক তথ্য কমে, কিন্তু কাঠামো পরিষ্কার হয়।

প্রজেক্টিভ জ্যামিতি ইউক্লিডীয় ধারণাকে বাদ দেয় না, বরং কোথায় কোন ধারণা ব্যবহার করতে হবে তা স্পষ্ট করে। মেট্রিক প্রশ্নে মেট্রিক পদ্ধতি নাও। incidence-ভিত্তিক প্রশ্নে প্রজেক্টিভ টুল নাও। অলিম্পিয়াডে এই সিদ্ধান্ত অনেক লম্বা গণনাকে ছোট, পরিষ্কার প্রমাণে নামিয়ে আনে।

আরও গভীরে: ভিত্তি থেকে উন্নত ধারণা

এখন উন্নত স্তরের কাঠামো দেখি। প্রজেক্টিভ transformation-কে homogeneous coordinate-এ 3×3 invertible matrix দিয়ে লেখা যায়, যেখানে scalar multiple একই transformation বোঝায়। এই group-কে $\mathrm{PGL}(3)$ বলা হয়। ফলে projective geometry শুধু চিত্র নয়, group action-এর ভাষায়ও ধরা যায়।

Point-line duality-কে আরও শক্তভাবে ব্যবহার করা যায়। একটি statement-এ point আর line অদলবদল করে, incidence সম্পর্ক ঠিক রাখলে নতুন একটি বৈধ statement পাওয়া যায়। তাই theorem প্রমাণের সময় অনেক ক্ষেত্রে একটি proof থেকে সঙ্গে সঙ্গে dual proof পাওয়া যায়। এটি শুধু স্মরণে সাহায্য করে না, যুক্তির কাঠামোও ছোট করে।

Conic-কে projective দৃষ্টিতে quadratic form দিয়ে লেখা হয়:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0.$$

এখানে matrix ভাষায় conic, tangent, polarity, pole-polar সম্পর্ক সব একসাথে বোঝা যায়। এই কাঠামোয় circle, ellipse, parabola, hyperbola আলাদা রূপ নয়, বরং projective-equivalent রূপ। তাই কঠিন চিত্রকে সহজ canonical আকারে পাঠানো একটি বৈধ কৌশল।

Cross ratio-এর শক্তি আরও বাড়ে যখন তুমি pencils আর bundles ব্যবহার করো। একই বিন্দু দিয়ে যাওয়া চারটি রেখার cross ratio-ও সংজ্ঞায়িত করা যায়, এবং projection-এর অধীনে সেটিও invariant থাকে। এই ভাবনা harmonic bundle, complete quadrilateral, এবং conic-এর tangent configuration-এ সরাসরি কাজে লাগে।

Desargues ও Pascal-Brianchon ধরনের theorem-এ একটি বড় শিক্ষা আছে: অনেক 2D statement আসলে 3D incidence থেকে ছায়া হিসেবে আসে। এই projection viewpoint নিলে অনেক জটিল collinearity/concurrency ফলকে এক ফ্রেমে আনা যায়। তাই projective geometry সমতল জ্যামিতিরও একটি meta-language হিসেবে কাজ করে।

Analytic দিকে গেলে birational map আর projective completion-এর ধারণা আসে। Affine curve-কে projective closure নিলে infinity-তে যে point যোগ হয়, তা singularity ও intersection behavior বুঝতে সাহায্য করে। Algebraic geometry-র বড় অংশ এই projective completion-এর উপর দাঁড়ায়।

সবশেষে বড় ছবিটা হলো: projective geometry তোমাকে figure-এর অপ্রয়োজনীয় মেট্রিক অংশ বাদ দিয়ে খাঁটি incidence কাঠামো দেখতে শেখায়। অলিম্পিয়াডে এটি দ্রুত সমাধান দেয়, আর উচ্চতর গণিতে এটি modern geometry-র দরজা খুলে দেয়।

অনুশীলনী সমস্যা

1. ত্রিভুজ ABC-এ $D \in BC, E \in CA, F \in AB$ এবং

$$\frac{BD}{DC} = 2, \quad \frac{CE}{EA} = 3, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{1}{6}.$$

Ceva ব্যবহার করে নির্ণয় কর AD, BE, CF সমবিন্দু কি না।

2. ত্রিভুজ ABC-এর বাহুগুলোর সম্প্রসারিত রেখায় P, Q, R বিন্দু আছে, যেখানে

$$\frac{BP}{PC} = 2, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AR}{RB} = -\frac{1}{3}.$$

Menelaus-এর শর্ত পূরণ হচ্ছে কি না যাচাই কর এবং P, Q, R সমরেখ কি না সিদ্ধান্ত নাও।

3. একই সরলরেখায় A, B, C, D চারটি বিন্দুর জন্য
$$\mathrm{CR}(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}.$$
$A = 0, B = 6, C = 2, D = 3$ (affine coordinate) হলে cross ratio নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর, $\mathrm{CR}(A, B, C, D) = \mathrm{CR}(C, D, A, B)$। তারপর একটি সংখ্যাগত উদাহরণে যাচাই কর।

5. দেখাও যে, $\mathrm{CR}(A, B, C, D) = -1$ হলে C, D হলো (A, B)-এর সাপেক্ষে harmonic pair। একটি বাস্তব মান নিয়ে নিজে উদাহরণ তৈরি করে হিসাব কর।

6. Projective plane $\mathbb{P}^2$-এ $[x : y : z]$ এবং $[\lambda x : \lambda y : \lambda z]$ একই বিন্দু বোঝায়। (ক) $[2 : 4 : 6]$-কে সরল আকারে লিখ। (খ) এটি কোন Euclidean বিন্দুর সঙ্গে মিলে তা নির্ণয় কর।

7. $z = 0$ রেখাকে line at infinity ধরা হয়। ব্যাখ্যা কর কেন Euclidean সমান্তরাল দুইটি রেখার intersection projective setting-এ $z = 0$-এ পড়ে। একটি সহজ অ্যালজেব্রিক উদাহরণ দাও।

8. চিত্রে তিন জোড়া সমান্তরাল রেখা থাকলে একটি projective transformation কল্পনা করে ব্যাখ্যা কর কীভাবে সমস্যাটিকে concurrency সমস্যায় রূপ দেওয়া যায়। তোমার ব্যাখ্যায় কোন কোন invariant থাকবে তা লিখ।