Tensors

Tawhid-Bin-Omar

∞ *Let Infinity Be Your Limit* ∞

February 24, 2026

টেনসরকে শুরুতে কঠিন মনে হতে পারে। আসলে বিষয়টি ধাপে ধাপে খুব স্বাভাবিক। এই লেখায় আমরা পরিচিত স্কেলার ও ভেক্টর থেকে শুরু করে টেনসরের ধারণায় যাব, তারপর কয়েকটি সহজ উদাহরণে দেখব কীভাবে এই ধারণা কাজে লাগে।

প্রথমে একটি মাত্র সংখ্যা নাও। এটিই স্কেলার। যেমন 5, -3, বা π।

এবার সমতলের প্রতিটি বিন্দুর সাথে একটি সংখ্যা জুড়ি:

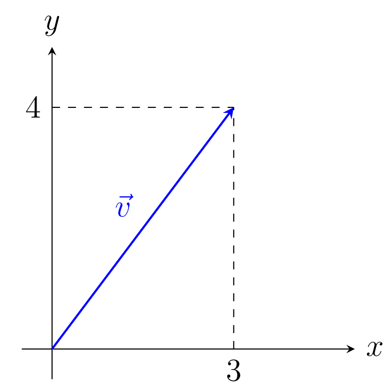
$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

এখানে $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ হলে ফাংশনটি একটি মান দেয়। ধাতুর পাতের তাপমাত্রা ভাবলে ছবিটা পরিষ্কার হয়। এটিই স্কেলার ক্ষেত্র।

এখন কয়েকটি সংখ্যা সাজিয়ে লিখি:

$$\vec{v} = (3, 4).$$

এটি ভেক্টর। $\mathbb{R}^n$-এ ভেক্টর যোগ করা যায়, স্কেলার দিয়ে গুণ করা যায়। অক্ষ ঘুরলে উপাংশ বদলায়, কিন্তু জ্যামিতিক তীর একই থাকে।

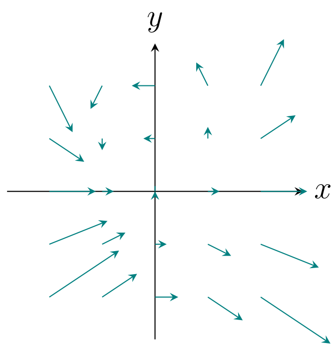


চিত্র ১: ভেক্টর $\vec{v} = (3, 4)$ কে স্থানাঙ্ক সমতলে দেখানো।

প্রতিটি বিন্দুর সাথে ভেক্টরও জোড়া যায়:

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 - y,\ xy).$$

এটিই ভেক্টর ক্ষেত্র। ইনপুট বিন্দু, আউটপুট ভেক্টর।



চিত্র ২: $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y, xy)$ ধরনের একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের নমুনা দিকচিত্র।

ডিফারেনশিয়েশন গঠনকে এক ধাপ বাড়িয়ে দেয়। যদি

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

তবে

$$\nabla f = (2x, 2y).$$

অর্থাৎ স্কেলার ফাংশন থেকে ভেক্টর ফাংশন পাওয়া গেল।

ম্যাট্রিক্সকে কেবল সংখ্যার টেবিল ভাবলে মূল ধারণা ধরা পড়ে না। ম্যাট্রিক্স আসলে ভেক্টরের ওপর ক্রিয়া করে। ম্যাট্রিক্স A এবং ভেক্টর $\vec{x}$ হলে

$$A\vec{x}$$

আরেকটি ভেক্টর দেয়।

এখন ডট প্রডাক্ট দেখি:

$$T(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}.$$

এটি দুইটি ভেক্টর নিয়ে একটি স্কেলার দেয়। প্রথম ইনপুটে এটি রৈখিক:

$$T(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2, \vec{v}) = aT(\vec{u}_1,\vec{v}) + bT(\vec{u}_2,\vec{v}).$$

দ্বিতীয় ইনপুটেও একই নিয়ম চলে। তাই এটি দ্বিরৈখিক।

এখন মূল সংজ্ঞা।

Definition: Rank-k Tensor

ভেক্টর স্পেস V-এ র‍্যাঙ্ক-k টেনসর হলো একটি বহুরৈখিক ম্যাপ

$$T : \underbrace{V\times\cdots\times V}_{k \text{ times}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

যা প্রতিটি আর্গুমেন্টে রৈখিক। র‍্যাঙ্ক 1 হলে লিনিয়ার ফাংশনাল, র‍্যাঙ্ক 2 হলে দ্বিরৈখিক ফর্ম।

পরিচিত উদাহরণ হিসেবে নাও

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

লিখি

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

তাহলে

$$Q(x,y) = \vec{x}^T A\vec{x}.$$

অর্থাৎ কোয়াড্রাটিক ফর্ম সরাসরি র‍্যাঙ্ক-2 টেনসরের সাথে যুক্ত।

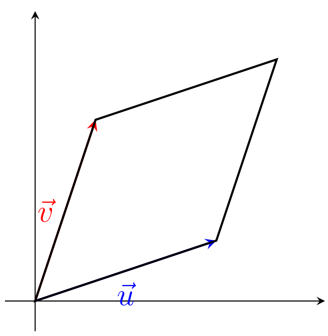
আরেকটি উদাহরণ:

$$T(\vec{u},\vec{v}) = u_1v_2 - u_2v_1.$$

ইনপুট অদলবদল করলে চিহ্ন উল্টে যায়:

$$T(\vec{v},\vec{u}) = -T(\vec{u},\vec{v}).$$

$\mathbb{R}^2$-এ এই মানটি $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের signed area দেয়।



চিত্র ৩: $T(\vec{u},\vec{v}) = u_1v_2 - u_2v_1$ এর মান সামান্তরিকের signed area বোঝায়।

তাই ধারাটি দাঁড়ায়:

Hierarchy

$$\text{scalars} \to \text{vectors} \to \text{linear or bilinear maps} \to \text{multilinear maps.}$$

এই দৃষ্টিতে টেনসর রহস্যময় থাকে না। তুমি শুধু দেখো কতটি ইনপুট আছে এবং প্রতিটিতে রৈখিক আচরণ হচ্ছে কি না।

আরও গভীরে: ভিত্তি থেকে উন্নত ধারণা

এখন প্রশ্ন আসে, টেনসর নিয়ে এত গুরুত্ব কেন। কারণ তুমি যদি basis বদলাও, টেনসরের উপাদান বদলাবে, কিন্তু টেনসরের অর্থ বদলাবে না। এই basis-change rule-ই টেনসর ধারণার কেন্দ্র। ভেক্টর একভাবে transform করে, covector অন্যভাবে transform করে, আর সাধারণ টেনসর এই দুই ধরনের transformation মিলিয়ে transform করে।

এখানে dual space-এর কথা জানা জরুরি। ভেক্টর স্পেস V-এর dual space V^* হলো সব linear functional-এর সমষ্টি। $\omega \in V^*$ হলে $\omega(\vec{v})$ একটি scalar দেয়। তাই rank-1 tensor দুই ধরনের হতে পারে: ভেক্টর-ধরনের $(1,0)$ এবং covector-ধরনের $(0,1)$। এই ভেদটা পরে differential geometry আর relativity-তে খুব কাজে লাগে।

এখন tensor product দেখো। যদি $\alpha \in V^*$ এবং $\beta \in V^*$ হয়, তাহলে $(\alpha \otimes \beta)(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha(\vec{u})\beta(\vec{v})$ একটি bilinear tensor দেয়। অনেক জটিল tensor-কে এই ধরনের সহজ tensor product-এর যোগফল হিসেবে লেখা যায়। এই দৃষ্টিভঙ্গি থেকে tensor algebra গড়ে ওঠে।

আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ অপারেশন হলো contraction। সহজ ভাষায়, একটি upper index আর একটি lower index pair করে যোগফল নিলে tensor-এর rank কমে যায়। Matrix trace, $\mathrm{tr}(A) = \sum_i A_{ii}$, contraction-এরই একটি পরিচিত উদাহরণ। তাই trace, divergence, Laplacian-এর মতো অপারেশনকে একই ছাতার নিচে বোঝা যায়।

মেট্রিক tensor উন্নত ধাপের দরজা খুলে দেয়। Euclidean ক্ষেত্রে $g_{ij} = \delta_{ij}$ থাকায় dot product সহজ হয়। সাধারণ curved space-এ $g_{ij}(x)$ অবস্থানভেদে বদলাতে পারে। তখন দৈর্ঘ্য, কোণ, area, volume সব metric থেকে বের হয়। অর্থাৎ geometry-কে coordinate-free ভাবে ধরতে metric tensor কেন্দ্রীয় ভূমিকা নেয়।

Calculus-এর সঙ্গে সংযোগটাও শক্ত। Scalar function f-এর gradient একটি vector field, Hessian H_f একটি rank-2 tensor (স্থানীয় curvature-এর তথ্য দেয়), Jacobian matrix একটি linear map field। Elasticity-তে stress tensor, fluid mechanics-এ rate-of-strain tensor, আর machine learning-এ Hessian-based optimization—সব জায়গায় একই ভাষা ফিরে আসে।

সবশেষে বড় ছবিটা মনে রাখো: টেনসর শিখলে তুমি coordinate-এর ভেতরে আটকে থাকো না। coordinate বদলালেও যে জিনিস অপরিবর্তিত থাকে, সেটাই আসল জ্যামিতিক/পদার্থগত তথ্য। এই কারণেই টেনসর শুধু একটি অধ্যায় নয়, বরং আধুনিক গণিতের একটি ভাষা।

অনুশীলনী সমস্যা

1. $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$ হলে ∇f বের কর। তারপর বিন্দু $(1,-1)$-এ গ্রেডিয়েন্টের মান নির্ণয় কর।
2. $\vec{u} = (2,-1)$ এবং $\vec{v} = (3,4)$। (ক) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ নির্ণয় কর। (খ) $T(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1$ ব্যবহার করে signed area নির্ণয় কর।
3. প্রমাণ কর, $T(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1$ একটি দ্বিরৈখিক ম্যাপ। তারপর দেখাও $T(\vec{v}, \vec{u}) = -T(\vec{u}, \vec{v})$।

4. ধরা যাক, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ এবং $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$। $\vec{x}^T A \vec{x}$ প্রসারিত করে x, y-এর একটি কোয়াড্রাটিক ফর্ম লিখ।

5. $Q(x, y) = 5x^2 + 6xy + 2y^2$ কে $\vec{x}^T A \vec{x}$ আকারে লিখ, যেখানে A একটি symmetric matrix।

6. $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ দ্বারা $T(\vec{u}, \vec{v}) = 2u_1v_1 - u_1v_2 + 3u_2v_2$ সংজ্ঞায়িত। দেখাও T দ্বিরৈখিক।

7. $S(\vec{u}) = 3u_1 - 2u_2$ একটি র‍্যাঙ্ক-1 টেনসরের উদাহরণ। (ক) দেখাও S রৈখিক। (খ) $\vec{u} = (4, -5)$ হলে $S(\vec{u})$ নির্ণয় কর।

8. ধরা যাক, $T(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = u_1v_1w_1 + u_2v_2w_2$ যেখানে সব ভেক্টর $\mathbb{R}^2$-এ। দেখাও T প্রতিটি ইনপুটে রৈখিক, তাই এটি র‍্যাঙ্ক-3 টেনসর।